目　录

序

本书以 n 维欧氏空间及其上实值函数为背景，介绍 Lebesgue 测度和积分理论，它是近代解析数学领域的基础知识.《实变函数》是大专院校数学系高年级学生的必修或选修课程.

《数学分析》主要研究定义在区间上的连续函数，《复变函数》是讨论定义在区域上的解析函数的性质的，《实变函数》则是将考察对象扩大到定义在可测集上的可测函数类，并使微积分在更宽松的环境中加以运用. 这就使得实分析处理问题的思想方法，较前更加细致而活泼，形成学习过程中数学思维能力的一个飞跃.为使教与学的过程较好地适应这一过渡，本书配备了较多难度适中的练习题，并力求使它们与课程的基本内容有较密切的配合. 正文中还列入了相当数量的例题，可以帮助学生提高自学和解题能力，并开阔思路. 书中标有(*)的部分，可根据实际情形而取舍.

本书是 1985 年版本的修订本. 增加了 Lebesgue 积分思想简介和 Lebesgue 传，较大幅度地调整了每章的练习，并对其中一部分作出解答和提示，以供读者参考.

作　者

1994 年 7 月

引 言

一、谈谈 Riemann 积分

实变函数的中心内容是Lebesgue(1875—1941)测度与积分理论，它是Riemann(1826—1866)积分的推广与发展，创立于20世纪初期，为近代分析奠定了基础。因而，在这里对 Riemann 积分理论作一简单回顾，将会有助于我们今后的学习。

在数学史上，第一个提出用分割区间、作和式的极限来严格地定义积分的要推Cauchy(1789—1857)。他考察的积分对象是在$[a,b]$上的连续函数，并用连续函数的中值性质来推导积分的存在性(他还提出用极限来定义函数在无界区域上的积分以及函数具有瑕点的积分)。

然而Cauchy关于积分存在性的证明只适用于函数至多有有限个不连续点的情形。于是，对于具有无穷多个不连续点的函数的积分存在性问题引起了许多学者的兴趣。

在对积分学发展起过推动作用的早期的工作中，应该提到Fourier(1768—1830)关于三角级数的工作。在1807年他指出，任一定义在$[-\pi,\pi]$上的函数$f(x)$可表示为三角级数：

$$a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}b_0+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\cdots+b_n\cos nx+\cdots,$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\qquad n=0,1,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x.$$

不过，这一陈述缺乏严格的论证。1837年 Dirichlet(1805—1859)对此提出了一些条件，其中特别提到了函数的可积性。

Riemann 在研究三角级数时，注意到上述工作，并特别讨论了函数的可积性问题。他不先假定函数是连续的，而去探求一个函数可积与否是什么性态？从这样一个角度出发，他在1854年的论文“关于一个函数展开成三角级数的可能性”中，给出了积分的定义以及函数可积的充要条件，这一条件，后来由 Darboux (1842—1917)以更加明确的形式给出。

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的有界函数。作分划

$$\Delta:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

且令

$$M_i=\sup\{f(x):x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\},\quad m_i=\inf\{f(x):x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

$$\overline{S}_\Delta=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1}),\quad \underline{S}_\Delta=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1}).$$

我们考虑 Darboux 上积分与下积分：

$$\overline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x=\inf_\Delta\overline{S}_\Delta,\quad \underline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x=\sup_\Delta\underline{S}_\Delta.$$

如果这两个值相等，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的，记其公共值为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

称它为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分。

若令 $|\Delta|=\max\{x_i-x_{i-1}:i=1,2,\cdots,n\}$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的充分且必要条件是：

$$\lim_{|\Delta|\to0}\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})=0. \tag{1}$$

Riemann 积分的重要性是不言而喻的，它对于处理诸如逐段连续的函数以及一致收敛的级数来说是足够的，并至今仍然是微

积分教程的主要内容之一。然而随着 Cantor(1845—1918)关于集合论的一系列工作的创始，出现了具有各种“奇特”现象的函数。对此不仅在研究函数的可积性，而且在积分理论的处理上还发生了许多困难。下面就 Riemann 积分理论中的几个主要方面来作一些简要分析。

（一）可积函数的连续性

上面提到，函数的可积性是与(1)等价的，由于(1)式涉及两个因素：分割小区间的长度$(x_i - x_{i-1})$以及函数在其上的振幅$(M_i - m_i)$。因此，为使(1)成立，粗略说来，就是在$|\Delta|\to 0$的过程中，其振幅$(M_i - m_i)$不能缩小的那些相应项的子区间的长度的总和可以很小(Riemann 注意到，定义在$[a,b]$上的单调函数只能存在有限个点使函数在其上的振幅超过预先给定的值，从而是可积的)。我们知道，函数振幅的大小与该函数的连继性有关，于是，条件(1)迫使函数的不连续点可用长度总和为任意小的区间所包围。这就是说，可积函数必须是差不多连续的。Riemann 积分的理论是以“基本上”连续的函数为研究对象的。

（二）极限与积分次序交换问题

在数学分析中，我们经常遇到的一个重要问题是两种极限过程的交换次序，尤其是积分与函数列的极限的交换问题。

我们知道，在一般微积分教科书中，都是用函数列一致收敛的条件来保证极限运算与积分运算的次序可以交换，不过，这一要求是过分强了。

例 $f_n(x) = x^n (0\leqslant x\leqslant 1)$。它是点收敛而不是一致收敛于

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0\leqslant x<1, \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

的，但仍有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x。$$

在 Riemann 积分意义下，存在下述有界收敛定理(见 Amer. Math. Monthly, 78, 1980)。

定理(有界收敛定理) 设

(i) $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$是定义在$[a,b]$上的可积函数；

(ii) $|f_n(x)|\leqslant M(n=1,2,\cdots,x\in[a,b])$；

(iii) $f(x)$是定义在$[a,b]$上的可积函数，且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),\quad x\in[a,b],$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这里，不仅受到条件(ii)的限制，而且还必须假定极限函数$f(x)$的可积性。下例表明，即使函数列是渐升的也不能保证其极限函数的可积性。

例 设$\{r_n\}$是$[0,1]$中全体有理数列，作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x=r_1,r_2,\cdots,r_n,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad n=1,2,\cdots.$$

显然有$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)\leqslant\cdots\leqslant 1$，且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

这里，每个$f_n(x)$皆是$[0,1]$上的 Riemann 可积函数且积分值为零，故有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

但极限函数$f(x)$不是 Riemann 可积的，这是因为

$$\overline{\int_0^1} f(x)\mathrm{d}x=1,\qquad \underline{\int_0^1} f(x)\mathrm{d}x=0.$$

从而也就谈不上积分号下取极限的问题。

有界收敛定理看起来也有点使人惊异，因为我们不难证明，

若有定义在$[a,b]$上的可积 函 数 列$\{f_n(x)\}$,$\{g_n(x)\}$，而且满足$|f_n(x)|\leqslant M$, $|g_n(x)|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$，以及

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),\qquad \lim_{n\to\infty} g_n(x)=f(x),$$

则必有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x.$$

但$f(x)$之积分仍然可以不存在。然而，上述积分之极限值并不依赖于$\{f_n(x)\}$本身，而依赖于$f(x)$。既 然 如此，不妨定义其积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

这说明 Riemann 积分的定义太窄了。

（三）关于微积分基本定理

我们知道，积分和微分之间的联系乃是微积分学的中枢：设$f(x)$在$[a,b]$上是可微函数且 $f'(x)$在$[a,b]$上 是可积的，则有

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(a),\quad x\in[a,b].$$

这就是说，从 $f'(x)$通过积分又获得了 $f(x)$。显然，为使这一微积分基本定理成立，$f'(x)$必须是可积的。早在1881年，Volterra (1860—1940)就作出了一个可微函数，其导函数是有界的，但导函数不是 Riemann 可积的。这就大大限制了微积分基本定理的应用范围。

（四）可积函数空间的完备性

Riemann 积 分的另一局限性还表现在可积函数空间的不完备性上。我们知道，在积分理论中，函数类用距离

$$d(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$$

（或

$$d(f,g)=\left\{\int_a^b|f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2}$$

等）作成距离空间是完备的这一事实具有重要意义。近代泛函分析中的许多基本技巧往往最终要用到空间的完备性。

例如，记$R([0,1])$为$[0,1]$上 Riemann 可积函数的全体。引进距离

$$d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x,\quad f,g\in R([0,1])$$

（其中认定当$d(f,g)=0$时，f与g是同一元）。我们说$R([0,1])$不是完备的意思，是指当$f_n\in R([0,1])(n=1,2,\cdots)$且满足

$$\lim_{n,m\to\infty}d(f_n,f_m)=0$$

时，并不一定存在$f\in R([0,1])$，使得

$$\lim_{n\to\infty}d(f_n,f)=0.$$

例如，令$\{r_n\}$是$(0,1)$中有理数的全体，设I_n是$[0,1]$中的开区间，$r_n\in I_n$，$|I_n|<1/2^n(n=1,2,\cdots)$，并作函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \bigcup_{n=1}^{\infty}I_n,\\ 0, & [0,1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n.\end{cases}$$

易知$f(x)$在$[0,1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$上是不连续的，它不是 Riemann 可积的，且不存在 Riemann 可积函数$g(x)$，使得$d(f,g)=0$。但若作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & \bigcup_{k=1}^{n}I_k,\\ 0, & [0,1]\setminus\bigcup_{k=1}^{n}I_k,\end{cases}$$

则$f_n(x)\in R([0,1])$，且有

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} d(f_n,f_m)=0,$$

以及$f_n(x)\to f(x)(n\to\infty)$，故$R([0,1])$按上述距离$d$是不完备的。

随着人们对数学分析各种课题的深入探讨，积分理论的研究工作也进一步展开。特别是通过Jordan(1838—1922)，Borel(1871—1956)等人关于点集测度理论的成果，揭示出测度与积分的联系。现代应用最广泛的测度与积分系统是Lebesgue(1875—1941)完成的。1902年他在"积分、长度与面积"的论文中所阐明的思想成为古典分析过渡到近代分析的转折点。Lebesgue积分理论不仅蕴涵了Riemann积分所达到的成果，而且还在较大程度上克服了后者的局限性。在Lebesgue以后，还有许多数学家如Riesz(1880—1956)，Denjoy(1884—不详)，Radon(1887—1956)都对积分理论的进一步发展作出了重要贡献。当然，今天我们来学习Lebesgue测度与积分时，不一定拘泥于原有的体系。

二、Lebesgue积分思想简介

对于定义在$[a,b]$上的正值函数，为使$f(x)$在$[a,b]$上可积，按照Riemann的积分思想，必须使得在划分$[a,b]$后，$f(x)$在多数小区间Δx_i上的振幅能足够小，这迫使具有较多振动的函数被排除在可积函数类外。对此，Lebesgue提出，不从分割区间入手，而是从分割函数值域着手。即任给$\delta>0$，作

$$m=y_0<y_1<\cdots<y_{i-1}<y_i<\cdots<y_n=M,$$

其中，$y_i-y_{i-1}<\delta$，m,M是$f(x)$在$[a,b]$上的下界与上界。并作点集

$$E_i=\{x:y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

这样，在E_i上，$f(x)$的振幅就不会大于δ。再计算

$$|I_i|=\text{“矩形面积”}=(\text{高})y_{i-1}\times\text{“底边长度”}|E_i|,$$

并作和

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}|I_i|,$$

它是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上积分(面积)的近似值。然后,让 $\delta\to 0$,且定义

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}|I_i|$$

(如果此极限存在)。也就是说,采取在 y 轴之分划来限制函数值变动振幅,即按函数值的大小先加以归类。Lebesgue 对这一设计作了生动的譬喻,大意如下:假定我欠人家许多钱,现在要归还。此时,应先按照钞票的票面值的大小分类,再计算每一类的面额总值,然后相加,这就是我的积分思想;如果不按面值大小先分划,而是按从钱袋中摸出的先后次序来计算总数,那就是 Riemann 积分的思想。

当然,按照Lebesgue 积分构思,会带来一系列的新问题。首先,分割函数值范围后,所得到的点集

$$E_i = \{x : y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i\},\ i=1,2,\cdots,n$$

不一定是一个区间,$[a,b]$ 也不一定是互不相交的有限个区间的并,而可能是一个分散而杂乱无章的点集及其并集。因此,所谓"底边长度"$|E_i|$的说法是不清楚的,即如何度量其"长度"以及是否存在"长度"均成问题。这促使Lebesgue 去寻找一种测量一般点集"长度"的方案,并称点集 E 的"长度"为测度,记为 $m(E)$。当然,这一方案必须满足一定的条件,才符合常理。如 $E=[0,1]$ 时,应有

$$m([0,1]) = 1;$$

又如 $E_1 \subset E_2$,应满足

$$m(E_1) \leqslant m(E_2)$$

特别是当 $E_i \cap E_j = \varnothing\ (i \neq j)$ 时,希望有

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

然而，这些限制使人们无法设计出一种测量方案，能使一切点集都有度量。因此，欲使 Lebesgue 积分思想得以实现，必须要求分割得出的点集 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是可测量的——可测集。这一要求能否达到，与所给函数 $y=f(x)$ 的性质有关。从而规定：凡是对任意 $t\in\boldsymbol{R}^1$，点集

$$E=\{x:f(x)>t\}$$

均为可测集时，称 $f(x)$ 为可测函数。这就是说，积分的对象必须属于可测函数范围。

为了系统介绍 Lebesgue 积分理论，就形成了测度——可测函数——积分这样一个系统①，它构成了本书的第二、三、四章。当然，作为一门数学课程，我们还要先介绍点集论的有关知识，这对点集测度理论是必要的准备，它作为本书的第一章。

① 随着积分论的发展，还有其他建立积分论的体系。

第一章　集合. 点集

集合论自十九世纪八十年代由德国数学家Cantor创立以来，已发展成为一个独立的数学分支，其基本概念与方法已渗入到二十世纪的各个数学领域. 集合论是研究集合的各种性质的，它的初期工作与数学分析的深入研究密切相关，现在它是实变函数理论的预备知识. 本章仅对一般集合与 R^n 中的点集知识作一必要的介绍.

§1.1　集合与子集合

集合是一个不给定义的概念. 就我们的实际应用范围来说，通过朴素的描述方法来进入这一领域已是足够的了. 例如：自然数全体构成一个集合，记为 N；有理数全体构成一个集合，记为 Q；实数全体构成一个集合，记为 R^1. 总之，我们所指的集合是按照某种规定而能够识别的一些具体对象或事物的总体. 构成集合的这些对象或事物称为集合的元素.

一般地说，集合的符号用大写字母 $A, B, C, \cdots, X, Y, Z$ 等来表示，集合的元素用小写字母 $a, b, \cdots, x, y, z$ 等来表示. 设 A 是一个集合，若 a 是 A 的元素，则记为 $a \in A$（叫做 a 属于 A）；$a \overline{\in} A$（叫做 a 不属于 A）表示 a 不是 A 的元素. 例如 $2/3 \in Q$，$\sqrt{2} \overline{\in} Q$ 等等.

通常采用的集合表示法有两种：其一是列举，例如由数1，2，3，4，5构成的集合记为 A 时，就用符号

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

来表示. 也就是说，在花括号{　}内将其元素一一列举出来；其二是用元素所满足的一定条件来描述它，如上述之 A 也可写成

$$A=\{x:x<6,\ x\in N\}.$$

在这里，{ }号内分为两部分来写，且用符号“:”隔开，前一部分是集合中元素的代表符号，后一部分表示元素所满足的条件或属于本集合的元素所特有的规定性质。有时也把A写成$\{x\in N: x<6\}$。

例 集合$\{x\in \boldsymbol{R}^1: 0<\sin x\leqslant 1/2\}$表示由满足

$$0<\sin x\leqslant\frac{1}{2}$$

的实数x所构成。有时也简写成$\{x: 0<\sin x\leqslant 1/2\}$。

例 集合$\{x\in \boldsymbol{R}^1: |x-x_0|<\delta, x_0\in \boldsymbol{R}^1\}$就是开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$。

定义1.1 对于两个集合A与B，若$x\in A$必有$x\in B$，则称A是B的子集合，简称A是B的子集，记为

$$A\subset B \quad 或 \quad B\supset A.$$

$A\subset B$也称为A含于B或B包含A。若$A\subset B$且存在B中元素不属于A，则称A是B的真子集。

例 设$A=\{1,2,3,4,5\}$，则集合$\{1\}$，$\{1,3\}$，$\{1,3,5\}$，$\{1,2,3\}$均是A的子集。

注意，上例中$\{1\}$表示由单个元素“1”所构成的集合，它是A的子集而不是A的元素。从而可知$\{1,\{2,3\}\}$不是A的子集。

为了论述与运算的方便，我们还指定一种所谓空集，它是不包含任何元素的集合，记为$\varnothing$。空集$\varnothing$是任一集合的子集。

定义1.2 设A, B是两个集合。若$A\subset B$且$B\subset A$，则称集合A与B相等，记为$A=B$。A与B相等就是A与B的元素完全相同，即A与B是同一个集合。

例 $\{x\in \boldsymbol{R}^1: x^2>1\}=\{x\in \boldsymbol{R}^1: |x|>1\}$。

集合$\{x: p(x)\}$与集合$\{x: q(x)\}$是否相等，就是看条件$p(x)$与$q(x)$是否等价。

定义1.3 设I是任意给定的一个集合，对于每一个$\alpha\in I$，

我们指定一个集合 A_α。这样我们就得到许多集合，它们的总体称为集合族，记为$\{A_\alpha:\alpha\in I\}$或$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$。这里的$I$常称为指标集。当$I=N$时，集合族也称为集合列，简记为$\{A_i\}$或$\{A_k\}$等等。

例 设r,s,t是三个互不相同的数，且$A=\{r,s,t\}$，$B=\{r^2,s^2,t^2\}$，$C=\{rs,st,rt\}$。若$A=B=C$，则$\{r,s,t\}=\{1,w,w^2\}$，其中

$$w=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2},\qquad i\ \text{是虚数单位。}$$

证明 因为集合相等就是其元素相同，所以将每个集合中的全部元素作数值和，所得到的三个数应该相等，若令其和为K，则有

$$r+s+t=r^2+s^2+t^2=rs+st+rt=K。$$

从而得到

$$K^2=(r+s+t)^2=(r^2+s^2+t^2)+2(rs+st+rt)=3K,$$

即$K=3$或0。又从数值的乘积看，同理有

$$rst=r^2s^2t^2,$$

故知$rst=1$。于是在$K=3$时，可知r,s,t为方程

$$x^3-3x^2+3x-1=0$$

的根，亦即$(x-1)^3=0$之根。但此时有$r=s=t=1$，不合题意。这说明$K=0$，此时r,s,t为方程

$$x^3-1=0$$

的根，即$x=1$以及$x=(-1\pm\sqrt{3}\,i)/2$。

§1.2 集合的运算

集合的分解与合成是探讨各集合之间相互关系以及组成新集合的一种有效手段，从而使集合论方法在实变函数论中获得重要的应用，这种分解与合成可以通过各种集合间的运算来表达，现

将其概念与主要性质作一简单介绍。

(一) 并与交

定义1.4 设A,B是两个集合，称集合$\{x:x\in A$或$x\in B\}$为A与B的并集，记为$A\cup B$。即由A与B的全部元素构成的集合。

为直观起见，现用图形来示意集合运算构成的新集合，称为Venn图。$A\cup B$见图1.1。

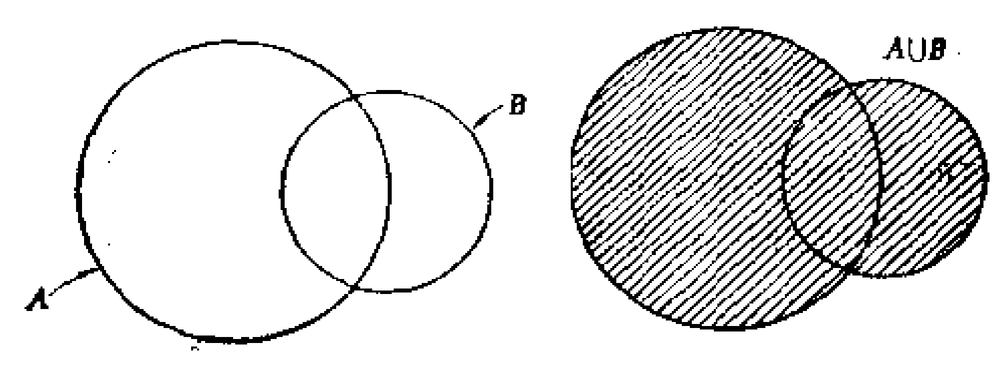


图 1.1

定义1.5 设A,B是两个集合，称集合$\{x:x\in A, x\in B\}$为A与B的交集，记为$A\cap B$。即由A与B的公共元素构成的集合(见图1.2)。若$A\cap B=\varnothing$，则称A与B互不相交。

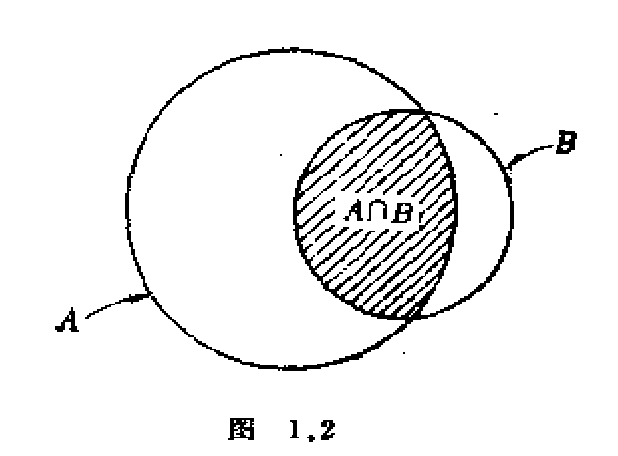


图 1.2

例 若$f(x)$是R^1上的实值函数，则

$$\{x:l\leqslant f(x)\leqslant k\}=\{x:f(x)\geqslant l\}\cap\{x:f(x)\leqslant k\}.$$

关于作交与并及其联合运算，有下述重要规律。

定理1.1 设有集合A,B与C，我们有

(i) 交换律：$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A;$ (1.1)

(ii) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C;$ (1.2)

(iii) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C). \tag{1.3}$$

类似地，可以定义多个集合的并集与交集。设有集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$，我们定义其并集与交集如下：

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x:x\text{属于某个}A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x:\text{对一切}\alpha\in I,x\in A_\alpha\}.$$

此外，前述之交换律与结合律仍适用于任意多个集合的情形。这一事实说明，当一个集合族被分解(以任何方式)为许多子集合族时，那末先作子集合族中各集合的并集，然后再作各并集的并集，仍然得到原集合族的并，而且作并集时与原有的顺序无关。当然，对于交的运算也是如此。至于分配律，则可以写为：

(i) $A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$；

(ii) $A\cup\left(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$.

例 若 $f(x)$ 是$[a,b]$上的实值函数，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in[a,b]:|f(x)|<n\}=[a,b],$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\in[a,b]:|f(x)|>\frac{1}{n}\right\}=\{x\in[a,b]:|f(x)|>0\}.$$

(二) 差与补

定义1.6 设A,B是两个集合，称$\{x:x\in A,x\notin B\}$为A与B的差集，记为$A\setminus B$(读作A减B)。即在A集合中而不在B集合中的一切元素构成的集合(见图

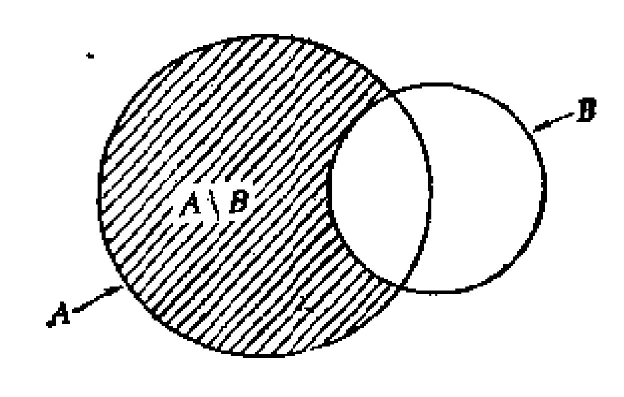


图 1.8

1.3)。

在上述定义中，当B是A的子集时，称$A\setminus B$为集合B相对于A的补集或余集。通常，在我们讨论问题的范围内，所涉及的集合总是某个给定的"大"集合X的子集，我们称X为全集。此时，集合B相对于全集X的补集就简称为B的补集或余集，并记为B^c。即

$$B^c = X\setminus B.$$

今后，凡没有明显标出全集X时，就表示取补集运算的全集X预先已知，而所讨论的一切集合皆为其子集。于是B^c也简记为

$$B^c = \{x : x \notin B\}.$$

显然，我们有下列简单事实：

(i) $A\cup A^c = X$，$A\cap A^c = \varnothing$，$(A^c)^c = A$，$X^c = \varnothing$，$\varnothing^c = X$；

(ii) $A\setminus B = A\cap B^c$；

(iii) 若$A\supset B$，则$A^c\subset B^c$；若$A\cap B = \varnothing$，则$A\subset B^c$。

特别地，我们有下述两个重要法则：

定理1.2(De·Morgan 法则)

$$\text{(i)}\quad \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c; \tag{1.4}$$

$$\text{(ii)}\quad \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c. \tag{1.5}$$

证明 以(i)为例。若$x\in\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c$，则$x\notin\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$。即对一切$\alpha\in I$，有$x\notin A_\alpha$。这就是说，对一切$\alpha\in I$，有$x\in A_\alpha^c$。故得$x\in\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$。反之，若$x\in\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$，则对一切$\alpha\in I$，有$x\in A_\alpha^c$。即对一切$\alpha\in I$，有$x\notin A_\alpha$。这就是说，

$$x\notin\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha,\qquad x\in\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c.$$

有了补集的概念，全集就一分为二，从而使A与A^c互相补充。我们常常可以通过A^c来研究A。此外，还可以利用补集运算的性质来简化集合关系的证明与表示。

定义1.7 设A, B为两个集合，称集合$(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$为$A$与$B$的对称差集，记为$A\triangle B$。这是由既属于$A$，$B$之一但又不同时属于两者的一切元素构成的集合（见图1.4）。

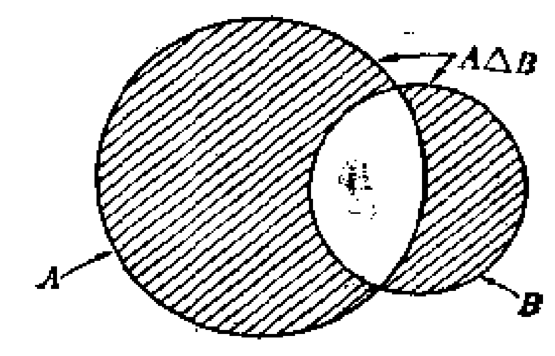


图 1.4

由定义立即可知$A\cup B=(A\cap B)\cup(A\triangle B)$。因此，对称差集是表示并集中除公共元以外的部分。显然，我们有下列简单事实：

(i) $A\triangle\varnothing=A$，$A\triangle A=\varnothing$，$A\triangle A^c=X$，$A\triangle X=A^c$；

(ii) 交换律：$A\triangle B=B\triangle A$；

(iii) 结合律：$(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$；

(iv) 交与对称差满足分配律：$A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$；

(v) $A^c\triangle B^c=A\triangle B$；

(vi) 对任意的集合A与B，存在唯一的集合E，使得$E\triangle A=B$，实际上$E=B\triangle A$。

（三）集合列的极限(集)

类似于数列的极限这一进行无限运算的工具，现在也把它移植于集合论中，我们将会看到这一运算在集合表示法中的重要作用。大家知道，单调数列的极限总是可以定义的，这就启发我们先来考虑单调集合列的无限运算。

定义1.8 设$\{A_k\}$是一个集合列，若

$$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots,$$

则称此集合列为递减集合列。此时我们称其交集$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$为集合列$\{A_k\}$的极限集，记为$\lim\limits_{k\to\infty}A_k$；若$\{A_k\}$满足

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset\cdots,$$

则称$\{A_k\}$为递增集合列，此时我们称其并集$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$为$\{A_k\}$的极限集，记为$\lim\limits_{k\to\infty}A_k$。

例 若$A_n=[n,\infty)(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\varnothing$。

例 设在$\boldsymbol{R}^1$上有渐升函数列：

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots,$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$。现在对于给定的实数$t$，作集合列

$$E_n=\{x:f_n(x)>t\},\quad n=1,2,\cdots.$$

显然有$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$，而且得到

$$\lim_{n\to\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:f_n(x)>t\}=\{x:f(x)>t\},$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\{x:f_n(x)>t\}=\{x:f(x)>t\}.$$

对于一般的集合列，也可类似于数列上、下极限的作法来给出上、下限集的概念。

定义1.9 设$\{A_k\}$是一集合列，令

$$B_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\quad n=1,2,\cdots,$$

显然有$B_n\supset B_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$，我们称

$$\lim_{k\to\infty}B_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$$

为集合列$\{A_k\}$的上极限集，简称为上限集，记为

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k.$$

类似地，称集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的下极限集，记为

$$\varliminf_{k\to\infty} A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k,$$

简称为下限集。若上、下限集相等，则说 $\{A_k\}$ 的极限集存在并等于上限集或下限集，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$。

例 设 E,F 是两个集合，作集合列

$$A_k=\begin{cases}E, & k\text{ 为奇数},\\ F, & k\text{ 为偶数},\end{cases}\qquad k=1,2,\cdots,$$

从而我们有

$$\varlimsup_{k\to\infty}A_k=E\cup F,\qquad \varliminf_{k\to\infty}A_k=E\cap F.$$

对于上、下限集的运算，易知下述事实成立：

(i) $E\setminus\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_k=\varliminf\limits_{k\to\infty}(E\setminus A_k)$；

(ii) $E\setminus\varliminf\limits_{k\to\infty}A_k=\varlimsup\limits_{k\to\infty}(E\setminus A_k)$。

定理1.3 若 $\{A_k\}$ 为一集合列，则

(i) $\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_k=\{x:$ 对任一自然数 n，存在 k $(k\geqslant n)$，$x\in A_k\}$；

(ii) $\varliminf\limits_{k\to\infty}A_k=\{x:$ 存在自然数 n_0，当 $k\geqslant n_0$ 时，$x\in A_k\}$。

这就是说，$\{A_k\}$ 的上限集是由属于 $\{A_k\}$ 中无穷多个集合的元素所构成的；$\{A_k\}$ 的下限集是由只不属于 $\{A_k\}$ 中有限多个集合的元素所构成的。从而立即可知

$$\varlimsup_{k\to\infty}A_k\supset\varliminf_{k\to\infty}A_k.$$

证明 以(ii)为例，若 $x\in\varliminf\limits_{k\to\infty}A_k$，则存在自然数 n_0，使得

$$x\in\bigcap_{k=n_0}^{\infty}A_k.$$

从而当$k\geqslant n_0$时，有$x\in A_k$。反之，若存在自然数n_0，当$k\geqslant n_0$时，有$x\in A_k$，则得到

$$x\in\bigcap_{k=n_0}^{\infty}A_k,$$

由此可知$x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\varliminf_{k\to\infty}A_k$。

例 设$\{f_n(x)\}$以及$f(x)$是定义在$\boldsymbol{R}^1$上的实值函数，则一切使$f_n(x)$不收敛于$f(x)$的点x所组成的集合D可表示为

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right\}.$$

这个集合表示式初看起来有点"不知从何说起"，因而我们来谈谈它的构思，详细证明留给读者。大家知道，若$f_n(x)$在点x_0不收敛到$f(x_0)$，则存在$\varepsilon_0>0$，对任给自然数k，必有$n\geqslant k$，使得

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0.$$

也就是说，若令

$$E_n(\varepsilon_0)=\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0\},$$

则点x_0是属于$\{E_n(\varepsilon_0)\}$中之无穷多个集合的，即是x_0含于$\{E_n(\varepsilon_0)\}$的上限集内。反之，对任意给定的$\varepsilon>0$，$\{E_n(\varepsilon)\}$的上限集中的点都是不收敛点。总之，这些上限集在对ε求并集后可构成全体不收敛点。最后，上述之ε又可由一列$\varepsilon_k:\varepsilon_1>\varepsilon_2>\cdots>\varepsilon_k>\cdots\to 0$来代替，特别取$\varepsilon_k=1/k$时，就得到$D$的表示式。

(四) 集合的直积

定义1.10 设X,Y是两个集合，称一切有序"元素对"(x,y)(其中$x\in X,y\in Y$)构成的集合为X与Y的直积集，记为$X\times Y$.即

$$X\times Y=\{(x,y):x\in X,\ y\in Y\},$$

其中$(x,y)=(x',y')$是指$x=x',y=y'$，$X\times X$也记为X^2。

例 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5\}$，则A与B之直积$A\times B$中的全部元素为：

(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5).

例 $[0,1]\times[0,1]$为平面上单位闭正方形。

例 $Q\times Q=Q^2$是平面上的有理点集。

§1.3 映射.基数

(一) 映射

在微积分中大家知道，定义在$[a,b]$上的一个实值函数就是从集合$[a,b]$到$\boldsymbol{R}^1$中的一种对应关系。现在，我们要把这一概念推广到一般的集合上，建立不同集合之间的联系。

定义1.11 设X,Y为两个非空集合。若对每个$x\in X$，均存在唯一的$y\in Y$与之对应，则称这个对应为映射(变换或函数)。若用f表示这种对应，则记为

$$f:X\to Y,$$

并称f是从X到Y的一个映射。此时，$x\in X$在Y中的对应元y称为x在映射f下的(映)像，x称为y的一个原像，我们记$y=f(x)$；若对每一个$y\in Y$，均有$x\in X$，使得$y=f(x)$，则称此f为从X到Y的满映射，或称f为从X到Y上的映射。

对于$f:X\to Y$以及$A\subset X$，我们记

$$f(A)=\{y\in Y:x\in A,y=f(x)\},$$

并称$f(A)$为集合A在映射f下的(映)像集($f(\phi)=\phi$)。显然，我们有下列简单事实：

(i) $f\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$；

(ii) $f\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\subset\bigcap\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$。

对于$f:X\to Y$以及$B\subset Y$，我们记

$$f^{-1}(B)=\{x\in X:f(x)\in B\},$$

并称$f^{-1}(B)$为B关于f的原象集。显然，我们有下列简单事实：

(i) 若$B\subset A$，则 $f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A)$；

(ii) $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$；

(iii) $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$；

(iv) $f^{-1}(B^c)=(f^{-1}(B))^c$。

定义1.12 设 $f:X\to Y$。若当 $x_1,x_2\in X$ 且 $x_1\neq x_2$时，有

$$f(x_1)\neq f(x_2),$$

即X中不同元有不同的像时，则称 f 是从X到Y的一个单射；若 f既是单射又是满映射，则称 f 为X到Y上的一一映射。在 f 是X到Y上的一一映射的情况下，对Y中的每一个元y，就有X中的唯一元 x，使得 $y=f(x)$。从而我们可作Y到X上的映射

$$g:g(y)=x,$$

其中 x 由关系 $y=f(x)$确定，并称 g 为 f 的逆映射，记为 f^{-1}。于是，当 f 为X到Y上的一一映射时，我们就说在X与Y之间存在一一对应。

定义1.13 设 $f:X\to Y$，$g:Y\to W$，则由

$$h(x)=g[f(x)]\quad(x\in X)$$

定义的 $h:X\to W$ 称为 g 与 f 的复合映射。

集合之间的映射不仅其本身具有实际的意义，而且是研究集合结构与性质的有效手段。当Y是 $\boldsymbol{R}^1$ 时，$f:X\to Y$ 一般称为函数。特别，对于X中的子集A，我们作

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in X\setminus A.\end{cases}$$

称 $\chi_A:X\to\boldsymbol{R}^1$是定义在X上的$A$的特征函数。

从定义可以看出，特征函数 χ_A 在一定意义上反映出A本身的特征。从而可以通过对它的研究来了解集合本身，例如 $A\neq B$ 就是 $\chi_A\neq\chi_B$，而$A\subset B$ 与 $\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$ 是等价的等等。显然，我们有下列简单事实：

(i) $\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)$;

(ii) $\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$;

(iii) $\chi_{A\setminus B}(x)=\chi_A(x)[1-\chi_B(x)]$;

(iv) $\chi_{A\Delta B}(x)=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|$。

（二）对等集与基数

对于一个集合来说，集合中元素的多少是最基本的问题之一。如果有两个集合A与B，我们要问A的元素比B的元素多还是少？或者一样多？

对于有限集来说，情形比较简单，因为我们可用自然数数出它们的元素个数。然而当A与B都是无限集时，情况就不同了。从根本上来说，我们还并不清楚什么叫做“A的元素与B的元素一样多”。实际上这需要给出适当的定义。为此，让我们再来分析一下有限集的情形。例如说有5只羊，5棵树，这是什么意思呢？这是说我们用5这个数来表示上述两个不同集合所具有的共同的数量属性。这种属性表明此两集合的元素可以正好一个对一个地对应起来，不多也不少。现在我们把这个办法推广于无限集，来比较其元素的多少。

定义1.14 设有集合A与B。若存在一个从A到B上的一一映射，则称集合A与B对等(也就是说可以把A与B的全部元素通过映射一一对应起来)，记为$A\sim B$。

例 自然数集与正偶数集对等，即

$$N\sim\{y: y=2n,\ n\in N\}.$$

例如存在一一映射：$y=f(n)=2n$。

例 $N\times N\sim N$。例如存在一一映射f：

$$f(i,j)=2^{i-1}(2j-1),\quad (i,j)\in N\times N.$$

这是因为任一自然数均可唯一地表为：

$$n=2^p\cdot q\quad (p\text{ 非负整数},\ q\text{ 正奇数}),$$

而对非负整数p，正奇数q，又有唯一的$i,j\in N$使得

$$p=i-1,\quad q=2j-1.$$

例 $(-1,1)\sim R^1$，因为存在一一映射：

$$f(x)=\frac{x}{1-x^2},\qquad x\in(-1,1).$$

显然，对等关系有如下的基本性质：

(i) $A\sim A$；

(ii) 若 $A\sim B$，则 $B\sim A$；

(iii) 若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$。

有了以上这些性质，为了获得两个集合之间的一一对应关系，我们就可以运用中间集合过渡的方法。此外，还可以采用分解，合并等方法。尤其是下述定理，更是我们证明集合对等的重要手段。

引理1.4（集合在映射下的分解定理）[①] 若有 $f:X\to Y$，$g:Y\to X$，则存在分解

$$X=A\cup A^{\sim},\quad Y=B\cup B^{\sim},$$

其中 $f(A)=B$，$g(B^{\sim})=A^{\sim}$，$A\cap A^{\sim}=\varnothing$ 以及 $B\cap B^{\sim}=\varnothing$。

证明 对于 X 中的子集 E，若满足

$$E\cap g(Y\setminus f(E))=\varnothing,$$

则称 E 为 X 中的隔离集。现将一切 X 中的隔离集之全体记为 Γ，且作其并集

$$A=\bigcup_{E\in\Gamma}E.$$

我们有 $A\in\Gamma$。事实上，对于任意的 $E\in\Gamma$，由于 $A\supset E$，故从

$$E\cap g(Y\setminus f(E))=\varnothing$$

可知 $E\cap g(Y\setminus f(A))=\varnothing$。从而有 $A\cap g(Y\setminus f(A))=\varnothing$。这说明 A 是 X 中的隔离集且是 Γ 中最大元[②]。

现在令 $f(A)=B$，$Y\setminus B=B^{\sim}$ 以及 $g(B^{\sim})=A^{\sim}$。首先知道

$$Y=B\cup B^{\sim}.$$

---

① 本引理是 Banach 建立的。

② 指包含关系。

其次由于 $A\cap A^{\sim}=\varnothing$，故又可得 $A\cup A^{\sim}=X$。事实上，若不然，那末存在 $x_0\in X$，使得 $x_0\overline{\in} A\cup A^{\sim}$，现在作 $A_0=A\cup\{x_0\}$，由于

$$B=f(A)\subset f(A_0),\ 故知\ B^{\sim}\supset Y\setminus f(A_0).$$

从而有 $A^{\sim}\supset g(Y\setminus f(A_0))$。这就是说，$A$ 与 $g(Y\setminus f(A_0))$不相交。由此可得

$$A_0\cap g(Y\setminus f(A_0))=\varnothing,$$

这与 A 是 Γ 的最大元相矛盾。

定理1.5(Cantor-Bernstein 定理)① 若集合X与Y的某个真子集对等，Y与X的某个真子集对等，则 $X\sim Y$。

证明 由题设知存在单射 $f:X\to Y$ 与单射 $g:Y\to X$，根据映射分解定理知

$$X=A\cup A^{\sim},\quad Y=B\cup B^{\sim},\quad f(A)=B,\quad g(B^{\sim})=A^{\sim}.$$

注意到这里的 $f:A\to B$ 以及 $g:A^{\sim}\to B^{\sim}$ 是一一映射，因而可作X到Y上的一一映射F如下：

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in A,\\ g^{-1}(x), & x\in A^{\sim}.\end{cases}$$

这说明 $X\sim Y$。

定理的特例：设集合A,B,C满足下述关系：

$$C\subset A\subset B,$$

若 $B\sim C$，则 $B\sim A$。

例 $[-1,1]\sim \boldsymbol{R}^1$。这是因为已知$(-1,1)\sim\boldsymbol{R}^1$，且有

$$(-1,1)\subset[-1,1]\subset\boldsymbol{R}^1.$$

如果我们要直接建立$[-1,1]$与 $\boldsymbol{R}^1$之间的一一对应关系，就会比较烦琐些。至少用一个连续函数来表达是不可能的，因为闭区间上的连续函数之值域仍为一个闭区间。

现在让我们来描述集合的基数(或势)的概念。设A,B是两个集合，如果 $A\sim B$,那末我们就说A与B的基数(Cardinal num-

① 本定理是 Cantor 提出的，而首先给予正确证明的是 Bernstein.这里的证明方法属于 Banach.

ber）或势是相同的。记为 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$。从而可见，凡是互相对等的一切集合均具有相同的基数，如果用 α 表示这一相同的基数，那末 $\overline{\overline{A}}=\alpha$ 就表示 A 属于这一对等集合族。对于两个集合 A 与 B，记 $\overline{\overline{A}}=\alpha$，$\overline{\overline{B}}=\beta$。若 A 与 B 的一个子集对等，则称 α 不大于 β，记为

$$\alpha\leqslant\beta.$$

若 $\alpha\leqslant\beta$ 且 $\alpha\neq\beta$，则称 α 小于 β（或 β 大于 α），记为

$$\alpha<\beta \quad (\text{或 } \beta>\alpha)①.$$

显然，若 $\alpha\leqslant\beta$ 且 $\beta\leqslant\alpha$，则由 Cantor–Bernstein 定理可知 $\alpha=\beta$。

由此可见，基数概念是有限集个数概念的一个推广，它反映出一切对等集所仅有的共性（数量属性）。

现在我们可以把有限集说得更清楚些，设 A 是一个集合，如果存在自然数 n，使得 $A\sim\{1,2,\cdots,n\}$，则称 A 为有限集，且用同一符号 n 记 A 的基数。由此可见，对于有限集来说，其基数可以看作是集合中元素的数目。若一个集合不是有限集，则称为无限集。下面我们着重介绍无限集中若干重要且常见的基数。

1. 自然数集 N 的基数．可列集

记自然数集 N 的基数为 $\aleph_0$（读作阿列夫(Aleph)零）。若集合 A 的基数为 $\aleph_0$，则 A 叫做可列集，这是由于 $N=(1,2,\cdots,n,\cdots)$，而 $A\sim N$，故可将 A 中元素按一一对应关系以自然数次序排列起来，附以下标，就有

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}.$$

定理1.6 任一无限集 E 必包含一个可列子集。

证明 任取 E 中一元，记为 x_1，再从 $E\setminus\{x_1\}$ 中取一元，记为 x_2，…。设已选出 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，因为 E 是无限集，所以

① 对于任意给定的两个集合 A 与 B，是否会发生下述情形：A 与 B 的任一子集不对等，B 与 A 的任一子集不对等。在应用集合论中的"选择公理"的基础上，可以证明这一情形是不会发生的。选择公理见第二章末尾的附注（一）。在关于集合的某些命题的证明中，我们事实上必须用到选择公理。

$$E\setminus\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \neq \varnothing,$$

于是又从 $E\setminus\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中可再选一元，记为 a_{n+1}。这样，我们就得到一个集合：

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots\}.$$

这是一个可列集且是 E 的子集。

这个定理说明，在众多的无限集中，最小的基数是 $\aleph_0$。

例 设 A 是有限集，B 是可列集，则 $A\cup B$ 是可列集。

不妨设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$B=\{b_1, b_2, \cdots\}$。若 $A\cap B=\varnothing$，则由

$$A\cup B=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots\}$$

可知 $A\cup B$ 是可列集；若 $A\cap B\neq\varnothing$，则由于

$$A\cup B=(A\setminus B)\cup B,$$

易知 $A\cup B$ 仍为可列集。

定理1.7 若 $A_n(n=1,2,\cdots)$ 为可列集，则并集

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

也是可列集。

证明 只需讨论 $A_i\cap A_j=\varnothing$ $(i\neq j)$ 的情形，设

$$A_1=\{a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1j}, \cdots\},$$
$$A_2=\{a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2j}, \cdots\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_i=\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ij}, \cdots\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

则 A 中的元素可排列如下：

$$\{a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \cdots, a_{ij}, \cdots\}.$$

其规则是 a_{11} 排第一，当 $i+j>2$ 时，a_{ij} 排在第 n 位：

$$n=j+\sum_{k=1}^{i+j-2} k.$$

例 有理数集 Q 是可列集，这只需证正有理数集 $Q_+=\{p/q\}$

为可列集即可，其中 p,q 都为正整数。而将后者 Q_+ 中的元素看成序对 (p,q) 就可应用上述定理。

我们知道，在任何两个实数之间都存在着有理数，即有理数在实数轴上是稠密的。现在又知道有理数集是可列集，这使得有理数集 Q 在许多事实的证明中扮演了重要角色。

例 由有限个自然数构成的有序数组之全体 A 为可列集。事实上，对每一个 n，n 个自然数的数组的全体对等于 N^n。从而知 A 对等于 $\bigcup_{n=1}^{\infty} N^n$，而后者之基数为 $\aleph_0(N^n \sim N)$。

注意，我们把有限集与可列集统称为可数集或至多可列集。因此可列集也可称为可数无限集。

例 $\boldsymbol{R}^1$ 中互不相交的开区间族是可数集。

例 $\boldsymbol{R}^1$ 上单调函数的不连续点为可数集。以单调上升函数 $f(x)$ 为例，若 x_0 为 $f(x)$ 的不连续点，则有

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)<\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0+0).$$

因此，x_0 就对应着一个开区间 $(f(x_0-0), f(x_0+0))$。显然，对于两个不同的不连续点 x_1 及 x_2，区间 $(f(x_1-0),f(x_1+0))$ 与 $(f(x_2-0),f(x_2+0))$ 是互不相交的，故只需看实轴上互不相交的开区间族，后者是可数集。

例 若 $f(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^1$ 上的实值函数，则集合

$\{x\in \boldsymbol{R}^1: f$ 在 x 点不连续但右极限 $f(x+0)$ 存在(有限)$\}$

是可数集。

证明 令

$$S=\{x\in \boldsymbol{R}^1: f(x+0)\text{存在(有限)}\}.$$

对每个自然数 n，作

$$E_n=\left\{x\in \boldsymbol{R}^1:\text{存在}\ \delta>0,\ \text{当}\ x',x''\in(x-\delta,x+\delta)\text{时,}\right.$$

$$\left.\text{有}\ |f(x')-f(x'')|<\frac{1}{n}\right\}.$$

显然，$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 是 $f(x)$ 的连续点集，从而只需指出 $S\setminus E_n (n=1,2,\cdots)$ 是可数集即可。

取定任意一个 n，并设 $x\in S\setminus E_n$。由 S 的定义可知，存在 $\delta>0$，使得

$$|f(x')-f(x+0)|<\frac{1}{2n},\quad x'\in(x,x+\delta).$$

从而当 $x',x''\in(x,x+\delta)$ 时，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{1}{n}.$$

这说明 $(x,x+\delta)\subset E_n$。也就是说 $S\setminus E_n$ 中每一个点 x 是某个开区间 $I_x=(x,x+\delta)$ 的左端点，且 I_x 与 $S\setminus E_n$ 不相交。因此当 $x_1,x_2\in S\setminus E_n$ 且 $x_1\neq x_2$ 时，我们得到

$$I_{x_1}\cap I_{x_2}=\varnothing.$$

于是区间族 $\{I_x: x\in S\setminus E_n\}$ 是可数的，即 $S\setminus E_n$ 是可数集。

这些例子表明，通过集合的基数概念可使我们把握研究对象的某种数量属性。

定理1.8 设 A 是无限集且其基数为 α。若 B 是可数集，则 $A\cup B$ 的基数仍为 α。

证明 不妨设 $B=\{b_1,b_2,\cdots\}$，$A\cap B=\varnothing$ 且

$$A=A_1\cup A_2,\quad A_1=\{a_1,a_2,\cdots\}.$$

我们作映射 f 如下：

$$f(a_i)=a_{2i},\quad a_i\in A_1,\qquad f(b_i)=a_{2i-1},\quad b_i\in B,$$

$$f(x)=x,\quad x\in A_2.$$

显然，f 是 $A\cup B$ 到 A 上的一一映射。

定理1.9 集合 A 为无限集的充分且必要条件是：A 与其真子集对等。

证明 因为有限集是不与其真子集对等的，所以充分性是成立的。现在取 A 中一个非空有限子集 B，则由上一定理立即可知

$A \sim (A \setminus B)$。

2. $\boldsymbol{R}^1$ 的基数。不可数集

我们知道，通过一一映射 $f(x)=(x+1)/2$ 可知，$[-1,1]$与$[0,1]$对等。因此要研究实数集 $\boldsymbol{R}^1$ 的基数，就只需要讨论$[0,1]$的基数即可。

定理1.10 $[0,1]=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$不是可数集。

证明 只需讨论$(0,1]$。为此，采用二进位制小数表示法：

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n},$$

其中a_n等于 0 或 1，并在表示式中有无穷多个a_n等于 1。显然，$(0,1]$与全体二进位制小数一一对应。

若在上述表示式中，把 $a_n=0$ 的项舍去，则得到

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n_i}},$$

这里的$\{n_i\}$是严格上升的自然数数列。再令

$$k_1=n_1,\quad k_i=n_i-n_{i-1},\quad i=2,3,\cdots.$$

则$\{k_i\}$是自然数数列，记由自然数数列的全体构成的集合为$\mathscr{K}$，则$(0,1]$与$\mathscr{K}$一一对应。

现在假定$(0,1]$是可数的，则$\mathscr{K}$是可数的，不妨将其全体排列如下：

$$\begin{array}{l}(k_1^{(1)},k_2^{(1)},\cdots,k_i^{(1)},\cdots),\\(k_1^{(2)},k_2^{(2)},\cdots,k_i^{(2)},\cdots),\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(k_1^{(i)},k_2^{(i)},\cdots,k_i^{(i)},\cdots),\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{array}$$

但这是不可能的，因为

$$(k_1^{(1)}+1,k_2^{(2)}+1,\cdots,k_i^{(i)}+1,\cdots)$$

属于$\mathscr{K}$，而它并没有被排列出来。这说明$\mathscr{K}$是不可数的，也就是

说$(0,1]$是不可数集。

我们称 $\boldsymbol{R}^1$ 的基数为连续基数，记为 c。

定理1.11 设有集合列$\{A_k\}$。若每个 A_k 的基数都是连续基数，则其并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 的基数是连续基数。

证明 不妨假定$A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$且$A_k \sim [k, k+1)$，我们有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \sim [1, \infty) \sim \boldsymbol{R}^1.$$

现在提出两个问题：其一，在 $\aleph_0$ 与连续基数 c 之间是否还有其它基数？答案见本章附注；其二，是否存在一个具有最大基数的集合A？下一定理给予否定的回答，这是集合论中最重要的结果之一。

定理1.12(无最大基数定理) 若A是非空集合，则A与其幂集$\mathscr{P}(A)$(由A的一切子集所构成的集合族)不对等。

证明 假定A与其幂集$\mathscr{P}(A)$对等，即存在一一映射 $f: A \to \mathscr{P}(A)$。我们作集合

$$B = \{x \in A : x \overline{\in} f(x)\},$$

于是有 $y \in A$，使 $f(y) = B \in \mathscr{P}(A)$。现在分析一下 y 与B的关系：

(i) 若 $y \in B$，则由B之定义可知 $y \overline{\in} f(y) = B$；

(ii) 若 $y \overline{\in} B$，则由B之定义可知 $y \in f(y) = B$。

这些矛盾说明A与$\mathscr{P}(A)$之间并不存在一一映射，即A与$\mathscr{P}(A)$并不是对等的。

易知集合A的基数小于其幂集$\mathscr{P}(A)$的基数。

(三) 基数运算简介

现在我们来粗略地谈谈基数的一般运算规律，它可使我们对许多集合的基数的判定更加迅速，其大小的比较更加清晰。

定义1.15 (i)设有基数 a_1 与 a_2，我们取集合 A_1 与 A_2，使

得 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$，$\overline{\overline{A_1}} = \alpha_1$ 且 $\overline{\overline{A_2}} = \alpha_2$①，称集合 $A_1 \cup A_2$ 的基数是 α_1 与 α_2 的和 $\alpha_1 + \alpha_2$。

(ii) 设有基数 α_1 与 α_2，我们取集合 A_1 与 A_2，使得

$$\overline{\overline{A_1}} = \alpha_1, \quad \overline{\overline{A_2}} = \alpha_2,$$

称直积集 $A_1 \times A_2$ 的基数为 α_1 与 α_2 的乘积 $\alpha_1 \cdot \alpha_2$。又记 n 个相同的基数 α 的乘积为 $\alpha \cdot \alpha \cdot \cdots \cdot \alpha = \alpha^n$。

(iii) 设有集合 A 与 B，记从 B 到 A 的一切映射所构成的集合为 A^B。若 $\overline{\overline{A}} = \alpha$，$\overline{\overline{B}} = \beta$，则称 A^B 的基数为 α 的 β 次幂 α^β②。

这些基数运算的规定都是有限集个数运算的推广，不过我们从前面的具体例子看到，无限集基数运算的结果与有限集个数运算的结果有很大不同。例如

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, \qquad \aleph_0^n = \aleph_0 .$$

例 设 $\overline{\overline{A}} = \alpha$，则

$$\overline{\overline{\mathscr{P}(A)}} = 2^\alpha.$$

事实上，2^α 是集合 $\{0,1\}^A$ 的基数，而 $\{0,1\}^A$ 就是定义在 A 上的一切特征函数所构成的集合。而相应于 A 中每个子集 E，均唯一地对应一个特征函数 χ_E：

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \in A \setminus E. \end{cases}$$

反之亦然，这说明 $\mathscr{P}(A)$ 与 $\{0,1\}^A$ 是对等的。

定理1.13 $c = 2^{\aleph_0}$

证 我们只需比较 $\{0,1\}^N$ 与 $(0,1]$ 的基数。对于任意的 $\varphi \in \{0,1\}^N$，作映射

---

① 这样的取法是可行的，事实上，若 $\overline{\overline{B_1}} = \alpha_1, \overline{\overline{B_2}} = \alpha_2$，则再作

$$A_1 = \{a_1\} \times B_1, \quad A_2 = \{a_2\} \times A_2,$$

其中 $a_1 = \varnothing$，$a_2 = \{\varnothing\}$，则 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$。

② 例如 $B = \{1,2,\cdots,n\}$，$A = \{0,1\}$，则 B 到 A 的映射总数正好是 2^n。

$$f: \varphi \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{3^n}.$$

易知 f 是从 $\{0,1\}^N$ 到 $(0,1]$ 的一个单射，故得 $2^{\aleph_0} \leqslant c$。另一方面，对每一个 $x \in (0,1]$，用二进位制小数(必须出现无穷多个数码1)表示为

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, \qquad a_n = 0, 1.$$

现在定义映射 g 如下：

$$g: x \to \varphi \in \{0,1\}^N, \quad \varphi(n) = a_n, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

易知 g 是从 $(0,1]$ 到 $\{0,1\}^N$ 的一个单射，故又得 $c \leqslant 2^{\aleph_0}$。根据 Cantor-Bernstein 定理，$c = 2^{\aleph_0}$。

例 $\boldsymbol{R}^2 \sim \boldsymbol{R}$。

事实上，因为 $\boldsymbol{R} \sim \mathscr{P}(N) \sim \mathscr{P}(Z \backslash N)$，所以有

$$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \sim \mathscr{P}(N) \times \mathscr{P}(Z \backslash N) \sim \mathscr{P}(Z) \sim \mathscr{P}(N) \sim \boldsymbol{R},$$

其中 Z 表示整数集。

在结束本节以前，下面再举几个实例供读者参考。

例* 设 $f(x)$ 为 (a,b) 上的实值函数，则集合

$$\{x \in (a,b): \text{右导数 } f'_+(x) \text{ 以及左导数 } f'_-(x) \text{ 存在而不相等}\}$$

为可数集。

证明 令

$$A = \{x \in (a,b): f'_+(x) < f'_-(x)\},$$
$$B = \{x \in (a,b): f'_+(x) > f'_-(x)\}.$$

只需证明 A, B 为可数集即可。以 A 为例。对任意的 $x \in A$，选有理数 r_x，使得 $f'_+(x) < r_x < f'_-(x)$。再选有理数 s_x 及 t_x:

$$a < s_x < t_x < b,$$

使得
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > r_x, \qquad s_x < y < x,$$

以及

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}<r_x, \qquad x<y<t_x,$$

合并得

$$f(y)-f(x)<r_x(y-x),$$

其中 $y\neq x$ 且 $s_x<y<t_x$。因此，对应规则 $x\to(r_x,s_x,t_x)$ 是从 A 到 Q^3 的一个映射，而且是一个单射。这是因为若有 $x_1,x_2\in A$，使

$$r_{x_1}=r_{x_2}, \quad s_{x_1}=s_{x_2}, \quad t_{x_1}=t_{x_2},$$

则 $(s_{x_1},t_{x_1})=(s_{x_2},t_{x_2})$且均含 x_1 及 x_2，于是同时有：

$$f(x_2)-f(x_1)<r_{x_1}(x_2-x_1), \quad f(x_1)-f(x_2)<r_{x_2}(x_1-x_2),$$

而 $r_{x_1}=r_{x_2}$，故得矛盾。这说明A与 Q^3 之一子集对等，而 Q^3 的基数是$\aleph_0$，即知 A 为可数集。

例* 定义在(a,b)上的凸函数在至多除一可数集外的点上都是可微的。

证明 所谓(a,b)上的凸函数 $f(x)$，是指对(a,b)中任意两点x_1,x_2，$x_1<x_2$，均有

$$f(x)\leqslant\frac{(x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)}{x_2-x_1},$$

$$x_1<x<x_2.$$

将上式进行变换，有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

此外对 $x<x'_2<x_2$，我们有

$$\frac{f(x'_2)-f(x)}{x'_2-x}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$



这说明存在右导数：

$$\lim_{x'_2\to x+}\frac{f(x'_2)-f(x)}{x'_2-x}=f'_+(x)<+\infty.$$

类似地可知左导数 $f'_-(x)$ 存在，且有

$$-\infty < f'_-(x) \leqslant f'_+(x) < \infty.$$

从而可得结论：(a,b)上的凸函数在至多除一可数点集外都是可微的。

例* 区间$[a,b]$上的连续函数全体$C[a,b]$的基数是$2^{\aleph_0}$。

证明 首先，因为$[a,b]$上的常数函数都是$[a,b]$上的连续函数，所以 $\boldsymbol{R}^1$ 与 $C[a,b]$中的一个子集对等，即$C[a,b]$的基数大于或等于$2^{\aleph_0}$。其次，对每个 $\varphi\in C[a,b]$，我们取一个平面有理点集$Q\times Q=Q^2$中的一个子集与它对应，即作映射 f 如下：

$$f(\varphi)=\{(s,t)\in Q\times Q: s\in[a,b],\ t\leqslant\varphi(s)\}.$$

易知 f 是从 $C[a,b]$到$\mathscr{P}(Q^2)$ 中子集的一个单射，由于$\mathscr{P}(Q^2)\sim\mathscr{P}(N)$，故知$\mathscr{P}(Q^2)$的基数是 $2^{\aleph_0}$。从而可知 $C[a,b]$ 的基数小于或等于$2^{\aleph_0}$。这说明 $C[a,b]$的基数是$2^{\aleph_0}$。

§1.4 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$

本书主要以 $\boldsymbol{R}^n$ 上的实值函数为研究对象，为此，还需进一步讨论 $\boldsymbol{R}^n$ 中点集的性质。

记一切有序数组 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 之全体为 $\boldsymbol{R}^n$，其中 $\xi_i\in\boldsymbol{R}^1$（$i=1,2,\cdots,n$）是实数，称 ξ_i 为 x 的第 i 个坐标，并定义运算如下：

(i) 加法。对于 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$以及 $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$，令

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\cdots,\xi_n+\eta_n);$$

(ii) 数乘。对于 $\lambda\in\boldsymbol{R}^1$，令 $\lambda x=(\lambda\xi_1,\cdots,\lambda\xi_n)\in\boldsymbol{R}^n$。

在上述两种运算下构成一个向量空间，对于$1\leqslant i\leqslant n$，记

$$e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0),$$

其中除第 i 个坐标为 1 外其余皆为零。$e_1,e_2,\cdots,e_i,\cdots,e_n$ 组成 $\boldsymbol{R}^n$ 的基底，从而 $\boldsymbol{R}^n$是实数域上的 n 维向量空间，并称 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的向量或点，当每个 ξ_i 均为有理数时，

$x=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$称为有理点。

定义1.16 设$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in \boldsymbol{R}^n$，令

$$|x|=(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^{1/2},$$

称$|x|$为向量x的模或长度。

关于向量的模我们有下列性质：

(i) $|x|\geqslant 0$；$|x|=0$，当且仅当$x=(0,0,\cdots,0)$；

(ii) $a\in \boldsymbol{R}^1$，$|ax|=|a||x|$；

(iii) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$；

(i)，(ii)的结论是明显的；(iii)是下述(iv)的推论。

(iv) 设$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，则有

$$(\xi_1\eta_1+\cdots+\xi_n\eta_n)^2\leqslant(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)(\eta_1^2+\cdots+\eta_n^2).$$

证明只需注意到函数

$$f(\lambda)=(\xi_1+\lambda\eta_1)^2+\cdots+(\xi_n+\lambda\eta_n)^2$$

是非负的(对一切λ)，由λ的二次方程$f(\lambda)$的判别式小于或等于零即得。(iv)是著名的Cauchy-Schwarz不等式。

一般地说，设X是一个集合。若对X中任意两个元素x与y有一个确定的实数与之对应，记为$d(x,y)$，它满足下述三条性质：

(i) $d(x,y)\geqslant 0$；$d(x,y)=0$，当且仅当$x=y$；

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$；

(iii) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$，

则认为在X中定义了距离d，并称(X,d)为距离空间。因而$(\boldsymbol{R}^n,d)$是一个距离空间，其中$d(x,y)=|x-y|$。

我们称$\boldsymbol{R}^n$为n维欧氏空间。

(一) 点集的直径。球邻域。矩体

定义1.17 设E是$\boldsymbol{R}^n$中一些点构成的集合，令

$$\operatorname{diam}(E)=\sup\{|x-y|:x,y\in E\},$$

称为点集E的直径。若$\operatorname{diam}(E)<\infty$，则称$E$为有界集。

显然，E是有界集的充分且必要条件是存在$M>0$，使得一切$x\in E$都满足$|x|\leqslant M$。

定义1.18 设$x_0\in\mathbf{R}^n,\delta>0$，我们称点集

$$\{x\in\mathbf{R}^n:|x-x_0|<\delta\}$$

为$\mathbf{R}^n$中以x_0为中心，以δ为半径的开球，也称为x_0的(球)邻域，记为$B(x_0,\delta)$，从而称

$$\{x:|x-x_0|\leqslant\delta\}$$

为闭球，记为$\overline{B}(x_0,\delta)$。$\mathbf{R}^n$中以x_0为中心，以δ为半径的球面是

$$\{x:|x-x_0|=\delta\}.$$

定义1.19 设$a_i,b_i(i=1,2,\cdots,n)$皆为实数且$a_i<b_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，我们称点集

$$\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n):a_i<\xi_i<b_i\quad(i=1,2,\cdots,n)\}$$

为$\mathbf{R}^n$中的开矩体($n=2$时为矩形，$n=1$时为区间)，即直积集

$$(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n).$$

类似地，$\mathbf{R}^n$中的闭矩体以及半开闭矩体就是直积集

$$[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n],\quad(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_n,b_n].$$

称$b_i-a_i(i=1,2,\cdots,n)$为矩体的边长。若各边长都相等，则称矩体为方体。

矩体也常用符号I,J等表示。其体积用$|I|,|J|$等表示。

若$I=(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)$，则

$$\operatorname{diam}(I)=[(b_1-a_1)^2+\cdots+(b_n-a_n)^2]^{1/2},$$

$$|I|=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i).$$

定义1.20 设$x_k\in\mathbf{R}^n(k=1,2,\cdots)$。若存在$x\in\mathbf{R}^n$，使得

$$\lim_{k\to\infty}|x_k-x|=0,$$

则称$x_k(k=1,2,\cdots)$为$\mathbf{R}^n$中收敛(于x的)点列，称x为它的极限。并简记为

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x.$$

若令 $x_k=\{\xi_{k_1},\xi_{k_2},\cdots,\xi_{k_n}\}$，$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$，则由于不等式

$$|\xi_{k_i}-\xi_i|\leqslant|x_k-x|\leqslant|\xi_{k_1}-\xi_1|+\cdots+|\xi_{k_n}-\xi_n|$$

对一切 k 与 i 都成立，故可知 $x_k(k=1,2,\cdots)$收敛于 x 的充分且必要的条件是：对每个 i，实数列$\{\xi_{k_i}\}$都收敛于ξ_i。由此以及根据实数列收敛的 Cauchy 原理可知，$x_k(k=1,2,\cdots)$ 是收敛列的充分且必要条件是

$$\lim_{l,m\to\infty}|x_l-x_m|=0 \quad (\{x_k\}\text{是基本列}).$$

（二）极限点

定义1.21 设$E\subset \boldsymbol{R}^n$，$x\in \boldsymbol{R}^n$。若存在 E 中的互异点列$\{x_k\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}|x_k-x|=0,$$

则称 x 为E的极限点；E的极限点全体记为E'，称为E的导集。

显然，有限集是不存在极限点的。

定理1.14 若$E\subset \boldsymbol{R}^n$，则$x\in E'$，当且仅当对任意的$\delta>0$，有

$$(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E\neq\varnothing.$$

证明 若$x\in E'$，则存在 E 中的互异点列$\{x_k\}$，使得

$$|x_k-x|\to 0 \quad k\to\infty.$$

从而可知对于任意的$\delta>0$，存在k_0，当$k\geqslant k_0$时，有$|x_k-x|<\delta$，即

$$x_k\in B(x,\delta) \quad (k\geqslant k_0).$$

反之，若对任意的$\delta>0$，有$(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E\neq\varnothing$，则令$\delta_1=1$，可取$x_1\in E$，$x_1\neq x$且$|x-x_1|<1$。令

$$\delta_2=\min\left(|x-x_1|,\frac{1}{2}\right),$$

可取$x_2\in E$，$x_2\neq x$且$|x-x_2|<1/2$，继续这一过程，就可得到E中

互异点列$\{x_k\}$，使得$|x-x_k|<1/k$，即

$$\lim_{k\to\infty}|x-x_k|=0.$$

这说明$x\in E'$。

定义1.22 设$E\subset \mathbf{R}^n$。若E中的点x不是E的极限点，即存在$\delta>0$，使得

$$(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E=\varnothing,$$

则称x为E的孤立点，即$x\in E\setminus E'$。

例 若$E=\{1,1/2,\cdots,1/k,\cdots\}$，则$E'=\{0\}$，且一切$1/k$ $(k=1,2,\cdots)$均为E的孤立点。

例 设$E=\{\sqrt{m}-\sqrt{n}:m,n$是自然数$\}$，则$E'=\mathbf{R}^1$。

事实上，对于任意的$x\in\mathbf{R}^1$，令

$$x_n=\sqrt{[(x+n)^2]}-\sqrt{n^2}$$

($[y]$表示不大于y的整数部分)，则有$\sqrt{(x+n)^2-1}-n<x_n<x$，因而可得

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-x|=0.$$

定理1.15 $(E_1\cup E_2)'=E_1'\cup E_2'$。

证明 因为$E_1\subset E_1\cup E_2$，$E_2\subset E_1\cup E_2$，所以

$$E_1'\subset(E_1\cup E_2)',\qquad E_2'\subset(E_1\cup E_2)'.$$

从而有$E_1'\cup E_2'\subset(E_1\cup E_2)'$。反之，若$x\in(E_1\cup E_2)'$，则存在$E_1\cup E_2$中的互异点列$\{x_k\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x.$$

显然，在$\{x_k\}$中必有互异点列$\{x_{k_i}\}$属于E_1或属于E_2，而且

$$\lim_{i\to\infty}x_{k_i}=x.$$

在$\{x_{k_i}\}\subset E_1$时，有$x\in E_1'$，否则$x\in E_2'$。这说明

$$(E_1\cup E_2)'\subset E_1'\cup E_2'.$$

定理1.16(Bolzano-Weierstrass定理) $\mathbf{R}^n$中任一有界无限点集E至少有一个极限点。

证明 首先从E中取出互异点列$\{x_k\}$。显然，$\{x_k\}$仍为有界的，而且$\{x_k\}$的第i $(i=1,2,\cdots,n)$个坐标所形成的实数列$\{\xi_k^{(i)}\}$是有界数列。其次根据R^1的Bolzano-Weierstrass定理可知，从$\{x_k\}$中可选出子列$\{x_k^{(1)}\}$，使得$\{x_k^{(1)}\}$的第一个坐标形成的数列是收敛列；再考察$\{x_k^{(1)}\}$的第二个坐标形成的数列，同理可从中选出$\{x_k^{(2)}\}$，使其第二个坐标形成的数列成为收敛列，此时其第一坐标数列仍为收敛列(注意，收敛数列的任一子列必收敛于同一极限)，…。至第n步，可得到$\{x_k\}$的子列$\{x_k^{(n)}\}$，其一切坐标数列皆收敛，从而知$\{x_k^{(n)}\}$是收敛点列，设其极限为x。由于$\{x_k^{(n)}\}$是互异点列，故x为E的极限点。

§1.5 闭集．开集．Borel集

(一) 闭集

定义1.23 设$E\subset \boldsymbol{R}^n$．若$E\supset E'$(即$E$包含$E$的一切极限点)，则称$E$为闭集(这里规定空集为闭集)。记$\bar{E}=E\cup E'$，并称$\bar{E}$为$E$的闭包($E$为闭集就是$E=\bar{E}$)。

例 $\boldsymbol{R}^n$中的闭矩体是闭集．$\boldsymbol{R}^n$本身是闭集。有理数集Q的闭包是$\boldsymbol{R}^1$。

例 若$f(x)$是定义在$\boldsymbol{R}^n$上的连续函数，则对任意的$t\in \boldsymbol{R}^1$，点集

$$\{x:f(x)\geqslant t\},\quad \{x:f(x)\leqslant t\}$$

都是闭集。

证明 以$\{x:f(x)\leqslant t\}$为例且简记为E．若$E'=\varnothing$，则无所可证。现在设$x_0\in E'$，则由极限点的定义可知，存在E中的互异点列$\{x_k\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0.$$

因为$x_k\in E(k=1,2,\cdots)$，所以有

$$f(x_k)\leqslant t,\quad k=1,2,\cdots.$$

从而由 f 的连续性可知

$$f(x_0)=\lim_{k\to\infty}f(x_k)\leqslant t.$$

这说明 $x_0\in E=\{x:f(x)\leqslant t\}$。即$E'\subset E$，$\{x:f(x)\leqslant t\}$是闭集。

定理1.17(闭集的性质) (i) 若F_1,F_2是$\boldsymbol{R}^n$中的闭集，则其并集$F_1\cup F_2$也是闭集。从而有限多个闭集的并集是闭集；

(ii) 若$\{F_\alpha:\alpha\in I\}$是$\boldsymbol{R}^n$中的一个闭集族，则其交集

$$F=\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha$$

是闭集。

证明 (i) 从等式

$$\begin{aligned}\overline{F_1\cup F_2}&=(F_1\cup F_2)\cup(F_1\cup F_2)'\\&=(F_1\cup F_2)\cup(F_1'\cup F_2')\\&=(F_1\cup F_1')\cup(F_2\cup F_2')\\&=\overline{F}_1\cup\overline{F}_2\end{aligned}$$

可知，当F_1,F_2为闭集时，有$\overline{F_1\cup F_2}=F_1\cup F_2$。这说明 $F_1\cup F_2$ 是闭集。

(ii) 因为对一切$\alpha\in I$有$F\subset F_\alpha$，所以对一切$\alpha\in I$有

$$\overline{F}\subset\overline{F}_\alpha=F_\alpha,$$

从而有

$$\overline{F}\subset\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha=F.$$

但$F\subset\overline{F}$，故$F=\overline{F}$，这说明F是闭集。

注意，无穷多个闭集的并集不一定是闭集，例如，令

$$F_k=\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]\subset\boldsymbol{R}^1,\quad k=1,2,\cdots,$$

则有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k=(0,1].$$

此例还说明

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k} \neq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{F}_k.$$

但我们有下列简单事实：设$E_\alpha \in \boldsymbol{R}^n (\alpha \in I)$，则

$$\bigcup_{\alpha \in I} \bar{E}_\alpha \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha}, \quad \overline{\bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha} \subset \bigcap_{\alpha \in I} \bar{E}_\alpha.$$

下述定理推广了$\boldsymbol{R}^1$中的闭区间套定理。

定理1.18(Cantor 闭集套定理) 若$\{F_k\}$是$\boldsymbol{R}^n$中的非空有界闭集列，且满足$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots$，则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing.$$

证明 若在$\{F_k\}$中有无穷多个相同的集合，则存在自然数k_0，当$k \geqslant k_0$时，有$F_k = F_{k_0}$。此时，

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = F_{k_0} \neq \varnothing.$$

现在不妨假定对一切k，F_{k+1}是F_k的真子集，即

$$F_k - F_{k+1} \neq \varnothing \quad (\text{一切} k),$$

我们选取

$$x_k \in F_k - F_{k+1}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

则$\{x_k\}$是$\boldsymbol{R}^n$中的有界互异点列。根据 Bolzano-Weierstrass 定理可知，存在$\{x_{k_i}\}$以及$x \in \boldsymbol{R}^n$，使得

$$\lim_{i \to \infty} |x_{k_i} - x| = 0.$$

由于每个F_k都是闭集，故知$x \in F_k (k = 1, 2, \cdots)$，即

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k.$$

（二）开集

定义1.24 设$G \subset \boldsymbol{R}^n$，若$G^c = \boldsymbol{R}^n \setminus G$是闭集，则称$G$为开集。

由此定义立即可知，$\boldsymbol{R}^n$ 本身与空集$\varnothing$是开集；$\boldsymbol{R}^n$ 中开矩体是开集；闭集的补集是开集。

定理1.19(开集的性质) (i) 若 $\{G_\alpha:\alpha\in I\}$是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集族，则其并集

$$G=\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha$$

是开集；

(ii) 若 $G_k(k=1,2,\cdots,m)$是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，则其交集

$$G=\bigcap_{k=1}^{m}G_k$$

是开集(有限个开集的交集是开集)；

(iii) 若G是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的非空点集，则G是开集的充分且必要的条件是：对于G中任一点x，存在$\delta>0$，使得$B(x,\delta)\subset G$。

证明 (i) 由定义知$G_\alpha^c(\alpha\in I)$是闭集，且有

$$G^c=\bigcap_{\alpha\in I}G_\alpha^c.$$

根据闭集的性质可知G^c是闭集，即G是开集。

(ii) 由定义知$G_k^c(k=1,2,\cdots,m)$是闭集，且有

$$G^c=\bigcup_{k=1}^{m}G_k^c.$$

根据闭集的性质可知G^c是闭集，即G是开集。

(iii) 若G是开集且$x\in G$，则由于G^c是闭集以及$x\overline{\in}G^c$，可知存在$\delta>0$，使得

$$B(x,\delta)\subset G.$$

反之，若对G中任一点x，存在$\delta>0$，使得

$$B(x,\delta)\subset G,$$

即

$$B(x,\delta)\cap G^c=\varnothing.$$

从而x不是G^c的极限点，即G^c的极限点含于G^c。这说明G^c是闭集，即G是开集。

定义1.25 设$E\subset \mathbf{R}^n$。若对于$x\in E$，有$\delta>0$，使得$B(x,\delta)\subset E$，则称x为E的内点；E的内点全体记为$\mathring{E}$，称为E的内核。

显然内核定为开集。上述性质(iii)说明开集就是集合中每个点都是内点的集合。

例 设函数$f(x)$在$B(x_0,\delta)$上有定义。令

$$\omega(x_0)=\lim_{\delta\to 0}\sup\{|f(x')-f(x'')|:x',x''\in B(x_0,\delta)\}.$$

我们称$\omega(x_0)$为f在x_0处的振幅。若G是$\mathbf{R}^n$中的开集且$f(x)$定义在G上，则对任意的$t\in \mathbf{R}^1$，点集

$$H=\{x\in G:\omega(x)<t\}$$

是开集。

证明 不妨设$H\neq\varnothing$。对于H中的任一点x_0，因为$\omega(x_0)<t$，所以存在$\delta_0>0$，使得$B(x_0,\delta_0)\subset G$，且有

$$\sup\{|f(x')-f(x'')|:x',x''\in B(x_0,\delta_0)\}<t.$$

现在对于$x\in B(x_0,\delta_0)$，可以选取$\delta_1>0$，使得

$$B(x,\delta_1)\subset B(x_0,\delta_0)$$

显然有

$$\sup\{|f(x')-f(x'')|:x',x''\in B(x,\delta_1)\}<t.$$

从而可知$\omega(x)<t$，即

$$B(x_0,\delta_0)\subset H.$$

这说明H中的点都是内点，H是开集。

下面的重要定理揭示出开集的构造，使我们对开集有了进一步的感性知识。

定理1.20 (i) $\mathbf{R}^1$中的非空开集是可数个互不相交的开区间(这里也包括$(-\infty,a)$，(b,∞)以及$(-\infty,\infty)$)的并集；

(ii) $\mathbf{R}^n$中的非空开集G是可列个互不相交的半开闭方体的并集。

证明 (i) 设G是$\mathbf{R}^1$中的开集。对于G中任一点a，由于a是G的内点，故存在$\delta>0$，使得$(a-\delta,a+\delta)\subset G$。现在令

$$a'=\inf\{x:(x,a)\subset G\},\qquad a''=\sup\{x:(a,x)\subset G\},$$

（这里a'可以是$-\infty$，a''可以是∞）显然，$a'<a<a''$且$(a',a'')\subset G$。这是因为对区间(a',a'')中任一点z，不妨设$a'<z\leqslant a$，必存在x，$a'<x<z$且有$(x,a)\subset G$，即$z\in G$。我们称这样的开区间(a',a'')为G的构成区间I_a。

如果$I_a=(a',a'')$，$I_b=(b',b'')$是G的构成区间，那末可以证明它们或是重合的或是互不相交的。为此，不妨设$a<b$。若

$$I_a\cap I_b\neq\varnothing,$$

则有$b'<a''$。于是令

$$\min\{a',b'\}=c,\qquad \max\{a'',b''\}=d,$$

则有$(c,d)=(a',a'')\cup(b',b'')$。取$x\in I_a\cap I_b$，则$I_x=(c,d)$是构成区间且

$$(c,d)=(a',a'')=(b',b'').$$

最后，我们知道$\boldsymbol{R}^1$中互不相交的区间族是可数的。

(ii) 首先将$\boldsymbol{R}^n$用格点（坐标皆为整数）分为可列个边长为1的半开闭方体，其全体记为Γ_0。再将Γ_0中每个方体的每一边二等分，则每个方体就可分为2^n个边长为$1/2$的半开闭方体，记Γ_0中如此作成的子方体的全体为Γ_1，继续按此方法二分下去，可得其所含方体越来越小的方体族组成的序列$\{\Gamma_k\}$，这里Γ_k中每个方体的边长是2^{-k}，且此方体是Γ_{k+1}中相应的2^n个互不相交的方体的并集。我们称如此分成的方体为二进方体。

现在把Γ_0中凡含于G内的方体取出来，记其全体为H_0。再把Γ_1中含于

$$G\setminus\bigcup_{J\in H_0}J$$

（J表示半开闭二进方体）内的方体取出来，记其全体为H_1。依此类推。H_k为Γ_k中含于

$$G\setminus\bigcup_{i=0}^{k-1}\bigcup_{J\in H_i}J$$

内的方体的全体。显然，一切由 $H_k(k=0,1,2,\cdots)$ 中的方体构成之集为可列的。因为 G 是开集，所以对任意的 $x\in G$，存在 $\delta>0$，使得

$$B(x,\delta)\subset G.$$

而 Γ_k 中的方体之直径，当 $k\to\infty$ 时，是趋于零的，从而可知 x 最终必落入某个 Γ_k 中的方体。这说明

$$G=\bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcup_{J\in H_k}J,\quad J\text{表示半开闭二进方体。}$$

$\boldsymbol{R}^n$ 中的开集还有一个重要事实，即 $\boldsymbol{R}^n$ 中存在由可列个开集构成的开集族 Γ，使得 $\boldsymbol{R}^n$ 中任一开集均是 Γ 中某些开集的并集。事实上，Γ 可取为

$$\left\{B\left(x,\frac{1}{k}\right):x\text{ 是 }\boldsymbol{R}^n\text{ 中的有理点，}k\text{ 是自然数}\right\}.$$

首先，Γ 是可列集。其次，对于 $\boldsymbol{R}^n$ 中开集 G 中的任一点 x，必存在 $\delta>0$，使得

$$B(x,\delta)\subset G.$$

现在取有理点 x'，使得 $d(x,x')<1/k$，其中 $k>2/\delta$，从而有

$$x\in B\left(x',\frac{1}{k}\right)\subset B(x,\delta)\subset G,$$

显然，一切如此做成的 $B(x',1/k)$ 的并集就是 G。

定义1.26 设 $E\subset\boldsymbol{R}^n$，Γ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集族。若对任意的 $x\in E$，存在 $G\in\Gamma$，使得 $x\in G$，则称 Γ 为（E 的）一个开覆盖。设 Γ 是 E 的一个开覆盖，若 $\Gamma'\subset\Gamma$ 仍是 E 的一个开覆盖，则称 Γ' 为 Γ 的一个子覆盖。

引理1.21 $\boldsymbol{R}^n$ 中点集 E 的任一开覆盖 Γ 都含有一个可数子覆盖。

证明从略。

定理1.22（Heine-Borel 有限子覆盖定理） $\boldsymbol{R}^n$ 中有界闭集的任一开覆盖均含有一个有限子覆盖。

证明 设F是R^n中的有界闭集，Γ是F的一个开覆盖．由上述引理，可以假定Γ由可列个开集组成：

$$\Gamma=\{G_1,G_2,\cdots,G_i,\cdots\}.$$

令

$$H_k=\bigcup_{i=1}^{k}G_i,\quad L_k=F\cap H_k^c,\quad k=1,2,\cdots.$$

显然，H_k是开集，L_k是闭集且有$L_k\supset L_{k+1}(k=1,2,\cdots)$．分两种情况：(i)存在$k_0$，使得$L_{k_0}$是空集，即$H_{k_0}^c$中不含$F$的点，从而知$F\subset H_{k_0}$，定理得证．(ii) 一切$L_k$皆非空集，则由Cantor闭集套定理可知，存在点$x_0\in L_k(k=1,2,\cdots)$．即$x_0\in F$且$x_0\in H_k^c(k=1,2,\cdots)$．这就是说$F$中存在点$x_0$不属于一切$H_k$，与原设矛盾，故第(ii)种情况不存在．

注意，在上述定理中，有界的条件是不能缺的．例如，在R^1中对自然数集作开覆盖$\{(n-(1/2),n+(1/2))\}$就不存在有限子覆盖．同样，闭集的条件也是不能缺的，例如，在R^1中对点集$\{1,1/2,\cdots,1/n,\cdots\}$作开覆盖

$$\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n},\ \frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right\},$$

就不存在有限子覆盖．

例 设F是R^n中有界闭集，G是开集且$F\subset G$，则存在$\delta>0$，使得当$|x|<\delta$时，有

$$F+\{x\}=\{y+x:y\in F\}\subset G.$$

证明 对于任意的$y\in F$，由于$y\in G$，故知存在$\delta_y>0$，使得$B(y,\delta_y)\subset G$．因为$\{B(y,\delta_y/2):y\in F\}$组成$F$的一个开覆盖，所以根据有限子覆盖定理，存在$y_1,y_2,\cdots,y_m\in F$，使得

$$F\subset\bigcup_{k=1}^{m}B\left(y_k,\frac{\delta_{y_k}}{2}\right).$$

于是，每一个$y\in F$至少属于某个$B(y_k,\delta_{y_k}/2)$，且y与G^c中的任一点z之间的距离为

$$|y-z| \geqslant |z-y_k| - |y_k - y| > \delta_{y_k} - \delta_{y_k}/2 = \delta_{y_k}/2.$$

现在取

$$\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_{y_1}, \delta_{y_2}, \cdots, \delta_{y_m}\},$$

则当 $|x|<\delta$ 时有 $y+x\in G$，即 $E+\{x\}\subset G$。

定理1.23 设 $E\subset \boldsymbol{R}^n$。若 E 的任一开覆盖都包含有限子覆盖，则 E 是有界闭集。

证明 设 $y\in E^c$，则对于每一个 $x\in E$，存在 $\delta_x>0$，使得

$$B(x,\delta_x)\cap B(y,\delta_x)=\varnothing.$$

显然，$\{B(x,\delta_x): x\in E\}$ 是 E 的一个开覆盖，由题设知存在有限子覆盖，设为

$$B(x_1,\delta_{x_1}),\ \cdots,\ B(x_m,\delta_{x_m}).$$

由此立即可知 E 是有界集。现在再令

$$\delta_0=\min\{\delta_{x_1},\cdots,\delta_{x_m}\},$$

则 $B(y,\delta_0)\cap E=\varnothing$，即 $y\notin E'$。这说明 $E'\subset E$。E 是闭集。

注意，如果 E 的任一开覆盖均包含有限子覆盖，我们就称 E 为紧集。上述两个定理表明，$\boldsymbol{R}^n$ 中的紧集就是有界闭集。

在闭集、开集的性质和有关定理的基础上，我们就可以把数学分析课程中关于连续性概念以及定义在闭区间上的连续函数的若干基本事实作如下推广。

定义1.27 设 $f(x)$ 是 $E\subset\boldsymbol{R}^n$ 上的实值函数，$x_0\in E$，如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in E\cap B(x_0,\delta)$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，称 x_0 为 f 的一个连续点（在 $x_0\notin E'$ 的情形，即 x_0 是 E 的孤立点时，$f(x)$ 自然在 $x=x_0$ 处连续）。若 E 中任一点皆为 f 的连续点，则称 $f(x)$ 在 E 上连续。我们记 E 上的连续函数之全体为 $C(E)$。

显然，关于 $C(E)$ 中的函数，同样也有类似四则运算的性质，也不难证明下述事实（证明从略）：

设F是$\boldsymbol{R}^n$中的紧集，$f\in C(F)$，则

(i) $f(x)$是F上的有界函数，即$f(F)$是$\boldsymbol{R}^1$中的有界集；

(ii) 存在$x_0\in F$，$y_0\in F$，使得

$f(x_0)=\sup\{f(x):x\in F\}$，　　$f(y_0)=\inf\{f(x):x\in F\}$；

(iii) $f(x)$在F上是一致连续的，即对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$x',x''\in F$且$|x'-x''|<\delta$时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

此外，若$E\subset\boldsymbol{R}^n$上的连续函数列$\{f_k(x)\}$一致收敛于$f(x)$，则$f(x)$是E上的连续函数。

例 设$f(x)$是定义在$E\subset\boldsymbol{R}^n$上的连续函数，对任意的$t\in\boldsymbol{R}$，令

$$E_t=\{x\in E:f(x)>t\},$$

则存在$\boldsymbol{R}^n$中包含E_t的开集G_t，使得

$$E_t=E\cap G_t.$$

证明 对任意的$x\in E_t$，即$f(x)>t$，根据f的连续性，可知存在$\delta_x>0$，使得当$y\in E\cap B(x,\delta_x)$时，有$f(y)>t$。现在作开集

$$G_t=\bigcup_{x\in E_t}B(x,\delta_x).$$

因为$G_t\supset E_t$，所以$E\cap G_t\supset E_t$。显然，对上述每个$B(x,\delta_x)$来说，有

$$E\cap B(x,\delta_x)\subset E_t,$$

从而可知$E\cap G_t\subset E_t$。这就是说，$E_t=E\cap G_t$。

(三) Borel 集

开集与闭集是$\boldsymbol{R}^n$中最基本的集合类型。当然，在$\boldsymbol{R}^n$中还有更多的点集并不是闭集或开集。经过前面的介绍大家比较地熟悉了开集与闭集，从而自然地想到用这种基本点集的运算试着构造或表示其它的点集，这就是我们在这里要介绍的所谓 Borel 集合。

定义1.28(F_σ, G_δ 集) 若 $E\subset \mathbf{R}^n$ 是可数个闭集的并集，则称 E 为 F_σ(型)集；若 $E\subset \mathbf{R}^n$ 是可数个开集的交集，则称 E 为 G_δ(型)集。

由定义可直接推知，F_σ 集的补集是 G_δ 集；G_δ 集的补集是 F_σ 集。

例 记 $\mathbf{R}^1$ 中全体有理点为 $\{r_k\}$，则有理点集

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\{r_k\}$$

为 F_σ 集。

例(函数连续点的结构) 若 $f(x)$ 是定义在开集 $G\subset \mathbf{R}^n$ 上的实值函数，则 f 的连续点集是 G_δ 集。

证明 令 $\omega(x)$ 为 f 在 x 点的振幅，易知 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续的充分且必要条件是 $\omega(x_0)=0$。由此可知 $f(x)$ 的连续点集可表为

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{x\in G:\omega(x)<\frac{1}{k}\right\}.$$

因为 $\{x\in G:\omega(x)<1/k\}$ 是开集，所以 $f(x)$ 的连续点集是 G_δ 集。

定义1.29 设 Γ 是由集合 X 中一些子集所构成的集合族且满足下述条件：

(i) $\varnothing\in\Gamma$；

(ii) 若 $A\in\Gamma$，则 $A^c\in\Gamma$；

(iii) 若 $A_n\in\Gamma(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\Gamma$，

这时我们称 Γ 是一个 σ-代数。

由定义立即可知下述事实：

(i) 若 $A_n\in\Gamma(n=1,2,\cdots m)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{m}A_n\in\Gamma$；

(ii) 若 $A_n\in\Gamma(n=1,2,\cdots)$，则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\Gamma,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\in\Gamma,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\in\Gamma;$$

(iii) 若 $A, B \in \Gamma$，则 $A \backslash B \in \Gamma$；

(iv) $X \in \Gamma$。

定义1.30(生成σ-代数) 设Σ是集合X中一些子集所构成的集合族，考虑包含Σ的σ-代数Γ(即若$A \in \Sigma$，必有$A \in \Gamma$)，这样的Γ是存在的，如$\mathscr{P}(X)$。记包含Σ的最小σ-代数为$\Gamma(\Sigma)$。也就是说，对任一包含Σ的σ-代数Γ'，若$A \in \Gamma(\Sigma)$，则$A \in \Gamma'$。我们称$\Gamma(\Sigma)$为由Σ生成的σ-代数。

定义1.31 由R^n中一切开集构成的并集族所生成的σ-代数称为Borel σ-代数，记为$\mathscr{B}$。$\mathscr{B}$中的元称为Borel集。

显然，闭集、开集、F_σ集与G_δ集皆为R^n中的Borel集；任一Borel集的补集是Borel集；Borel集合列的并、交、上(下)限集皆为Borel集。例如$F_{\sigma\delta}$集(可数个F_σ集的交集)是Borel集。

例*(连续函数可微点集的结构) 若$f(x)$是R^1上的连续函数，则f的可微点集是$F_{\sigma\delta}$集。

证明 我们只需证明f的不可微点集是可列个G_δ集的并集。引用上、下导数的概念，则其不可微点集就是下述三个集合的并集：

$$A=\left\{a:\varliminf_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\varlimsup_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\},$$

$$B=\left\{a:\varlimsup_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty\right\},$$

$$C=\left\{a:\varliminf_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty\right\}.$$

现在令Q是R^1中有理数集，则上述集合又可表为

$$A=\bigcup_{r,R\in Q}\left\{a:\varliminf_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant r<R\leqslant\varlimsup_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\}$$

$$=\bigcup_{\substack{r,R\in Q\\ R>r}}\left(\left\{a:\varliminf_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant r\right\}\right.$$

$$\bigcap\left\{a:\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant R\right\}),$$

$$B=\bigcap_{r\in Q}\left\{a:\overline{\lim_{x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant r\right\},$$

$$C=\bigcap_{r\in Q}\left\{a:\underline{\lim_{x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant r\right\}.$$

从而我们只需证明对任意的 $t\in R^1$，点集

$$\left\{a:\overline{\lim_{x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant t\right\}$$

是 G_δ 集即可；同理可证点集

$$\left\{a:\underline{\lim_{x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant t\right\}$$

亦是 G_δ 集。

对于每个自然数 n 与 k，作集合

$$G_{n,k}=\left\{a:\text{存在满足}0<|x-a|<\frac{1}{n}\text{的 }x,\right.$$

$$\left.\text{使得}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>t-\frac{1}{k}\right\}.$$

则由 f 的连续性可知，$G_{n,k}$是开集。易知

$$\bigcap_{n,k=1}^{\infty}G_{n,k}=\left\{a:\overline{\lim_{x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant t\right\}.$$

定理1.24(Baire 定理)* 设 $E\subset R^n$是 F_σ集，即

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k,$$

$F_k(k=1,2,\cdots)$是闭集。若每个 F_k皆无内点，则 E 也无内点。

证明 若 E 有内点，设为 x_0，则存在 $\delta_0>0$，使 $\overline{B}(x_0,\delta_0)\subset E$。因为 F_1 是无内点的，所以必存在 $x_1\in B(x_0,\delta_0)$ 且有 $x_1\notin F_1$。又因为 F_1是闭集，所以可以取到 $\delta_1(0<\delta_1<1)$，使得

$$\overline{B}(x_1,\delta_1)\cap F_1=\varnothing,$$

同时有 $\overline{B}(x_1,\delta_1)\subset B(x_0,\delta_0)$。再从 $\overline{B}(x_1,\delta_1)$出发以类似的推理

使用于 F_2，则可得 $\overline{B}(x_2,\delta_2)\cap F_2=\varnothing$，同时有

$$\overline{B}(x_2,\delta_2)\subset B(x_1,\delta_1),$$

这里可以要求 $0<\delta_2<1/2$。继续这一过程，可得点列 $\{x_k\}$ 与正数列 $\{\delta_k\}$，使得对每个自然数 k，有

$$\overline{B}(x_k,\delta_k)\subset B(x_{k-1},\delta_{k-1}),\qquad \overline{B}(x_k,\delta_k)\cap F_k=\varnothing.$$

其中 $0<\delta_k<1/k$。由于当 $l>k$ 时有 $x_l\in B(x_k,\delta_k)$，故

$$|x_l-x_k|<\delta_k<\frac{1}{k}.$$

这说明 $\{x_k\}$ 是 R^n 中的基本列(Cauchy 列)，从而是收敛列。即存在 $x\in R^n$，使得

$$\lim_{k\to\infty}|x_k-x|=0.$$

此外，从不等式

$$|x-x_k|\leqslant|x-x_l|+|x_l-x_k|<|x-x_l|+\delta_k,\quad l>k$$

立即可知(令 $l\to\infty$) $|x-x_k|\leqslant\delta_k$。这说明 $x\in\overline{B}(x_k,\delta_k)$。即对一切 k，$x\overline{\in}F_k$。这与 $x\in E$ 发生矛盾。

例 有理数集 Q 不是 G_δ 集。

事实上，令 $Q=\{r_k:k=1,2,\cdots\}$，假定

$$Q=\bigcap_{i=1}^{\infty}G_i,$$

式中 $G_i(i=1,2,\cdots)$ 是开集，则有表示式

$$R^1=(R^1\setminus Q)\cup Q=\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i^c\right)\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{r_k\}\right).$$

这里的每个单点集 $\{r_k\}$ 与 G_i^c 皆为闭集，而且从 $\overline{G_i}=R^1$ 可知每个 G_i^c 是无内点的。这说明 R^1 是可列个无内点之闭集的并集。从而由 Baire 定理可知 R^1 也无内点，这一矛盾说明 Q 不是 G_δ 集。

例* 若 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 R^1 上的连续函数列，且有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\qquad x\in R^1,$$

则

(i) 若 $G\subset \mathbf{R}^1$是开集，则 $f^{-1}(G)$是 F_σ集；

(ii) $f(x)$的连续点集是 $\mathbf{R}^1$中的稠密集。

证明 (i) 由于 $\mathbf{R}^1$中的开集 G 是可数个构成区间的并，故不妨设 G 是一个开区间 (a,b)，根据点集关系：

$$\{x: f(x)>a\}=\bigcup_{\substack{\varepsilon\in Q\\ \varepsilon>0}}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\{x: f_n(x)\geqslant a+\varepsilon\},$$

可知$\{x: f(x)>a\}$是 F_σ集。同理可证$\{x: f(x)<b\}$也是 F_σ集。从而它们的交集 $f^{-1}((a,b))$也是 F_σ集。

(ii) 若 a 是 $f(x)$的不连续点，则存在有理数 p 与 q，使得

$$p<f(a)<q,$$

而且存在点列$\{a_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,\qquad f(a_n)\overline{\in}(p,q),\qquad n=1,2,\cdots.$$

于是，若令 f 的不连续点集为 D，则

$$D=\bigcup_{\substack{p,q\in Q\\ p<q}}\left(\overline{f^{-1}(A_{pq})}\setminus f^{-1}(A_{pq})\right),$$

其中 $A_{pq}=\mathbf{R}^1\setminus(p,q)$。

现在，由(i)可知 $f^{-1}(A_{pq})$是 G_δ集，从而

$$\overline{f^{-1}(A_{pq})}\setminus f^{-1}(A_{pq})$$

是 F_σ集，易知它是无内点的。根据 Baire 定理，D 也无内点，这说明 $f(x)$的连续点在 $\mathbf{R}^1$中稠密。

例 Cantor(三分)集。

这里我们来介绍一个构思巧妙的特殊点集——Cantor 集。此集合是 Cantor 在解三角级数问题时作出来的，它具有若干重要特征，常是我们构造重要反例的基础。

设$[0,1]\subset \mathbf{R}^1$，将$[0,1]$三等分，并移去中央三分开区间

$$I_{1,1}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),$$

记其留存部分为 F_1，即

$$F_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\bigcup\left[\frac{2}{3},1\right]=F_{1,1}\bigcup F_{1,2}$$

再将 F_1中的区间[0,1/3]以及[2/3,1]各三等分，并移去中央三分开区间

$$I_{2,1}=\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)\quad 及 \quad I_{2,2}=\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right),$$

再记 F_1中留存的部分为 F_2(见图1.5)，即

$$F_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\bigcup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\bigcup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\bigcup\left[\frac{8}{9},1\right]$$
$$=F_{2,1}\cup F_{2,2}\cup F_{2,3}\cup F_{2,4}.$$

0 $\frac{1}{9}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{8}{9}$ 1

图 1.5

一般地说，设所得剩余部分为 F_n，则将 F_n中每个(互不相交)区间三等分，并移去中央三分开区间，再记其留存部分为 F_{n+1}，如此等等。从而我们得到集合列$\{F_n\}$，其中

$$F_n=F_{n,1}\cup F_{n,2}\cup\cdots\cup F_{n,2^n},\qquad n=1,2,\cdots.$$

作点集

$$C=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n.$$

我们称 C 为 Cantor(三分)集。

Cantor 集 C 有下述基本性质：

(i) C 是非空有界闭集。

因为每个 F_n都是非空有界闭集，而且 $F_n\supset F_{n+1}$，所以根据闭集套定理，可知 C 不是空集(实际上，$F_n(n=1,2,\cdots)$中每个闭区间的端点都是没有被移去的，即都是 C 中的点)。显然，C 是闭集。

(ii) $C=C'$ ($E=E'$ 称为完全集)。

设 $x\in C$，则 $x\in F_n(n=1,2,\cdots)$，即对每个 n，x 属于长度为 $1/3^n$ 的 2^n 个闭区间中的一个。于是对任一 $\delta>0$，存在 n，满足 $1/3^n<\delta$，使得 F_n 中包含 x 的闭区间含于 $(x-\delta,x+\delta)$。此闭区间有两个端点，它们是 C 的点且总有一个不是 x，这就说明 x 是 C 的极限点，故得 $C'\supset C$。由(i)知 $C=C'$。

(iii) C 无内点。

设 $x\in C$，给定任一区间 $(x-\delta,x+\delta)$，取 $2/3^n<\delta$，因为 $x\in F_n$，所以 F_n 中必有某个长度为 $1/3^n$ 的闭区间 $F_{n,k}$ 含于 $(x-\delta,x+\delta)$。然而在构造 C 集的第 $n+1$ 步时，将移去 $F_{n,k}$ 的中央三分开区间。这说明 $(x-\delta,x+\delta)$ 不含于 C。

(iv) Cantor 集的基数是 $2^{\aleph_0}$。

事实上，将 $[0,1]$ 中的实数按三进位小数展开，则 Cantor 集中点 x 与下述三进位小数集的元

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i},\qquad a_i=0,2$$

一一对应。从而知 C 为连续基数集。

注　在下一章中我们将指出，可数个互不相交区间的长度的总和等于每个区间长度的和。于是 $[0,1]\setminus C$ 的长度的总和为

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}3^{-n}=1.$$

我们还可以在 $[0,1]$ 中作出总长度为 δ $(0<\delta<1$ 是任意给定的数$)$ 的稠密开集。为此，取 $p=(1+2\delta)/\delta$，并采用类似于 Cantor 集的构造过程：第一步，我们移去长度为 $1/p$ 的同心开区间；第二步，在留存的两个闭区间的每一个中，又移去长度为 $1/p^2$ 的同心开区间；第三步，在留存的四个闭区间中再移去长度为 $1/p^3$ 的同心区间；…。继续此过程，可得一列移去的开区间，记其并集为 G (开集)，则 G 的总长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\left(\frac{1}{p}\right)^n=\frac{1}{p-2}=\delta.$$

我们称 $C_p=[0,1]\setminus G$ 为类 Cantor 集(当 $p=3$时，C_p 就是 Cantor (三分)集)。C_p 也是非空完全集，且沒有内点。由此还易知：若要在 R^n 的单位方体$[0,1]\times[0,1]\times\cdots\times[0,1]$ 中构造具有类似性质的集合，则只需取 $C\times C\times\cdots\times C$($C$ 是$[0,1]$中的类 Cantor 集)即可。

现在用 Cantor 集来构造一个函数——Cantor 函数，在后文中我们将看到它的特异性质的一些应用。

例 Cantor 函数。

设C是$[0,1]$中的Cantor 集，其中的点我们用三进位小数

$$x=2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i},\quad \alpha_i=0,1,\quad i=1,2,\cdots$$

来表示。

(i) 作定义在C上的函数 $\varphi(x)$。

对于 $x\in C$，定义

$$\varphi(x)=\varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{2^i},\quad \alpha_i=0,1,\quad i=1,2,\cdots.$$

因为$[0,1]$中点可用二进位小数表示，所以有 $\varphi(C)=[0,1]$。

下面证明 $\varphi(x)$ 是C上的单调上升函数。设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\beta_1,\beta_2,\cdots$是取 0 或 1 的数，而且它们所表示的$C$中的数有下述关系：

$$2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}<2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{3^i}.$$

若记 $k=\mathrm{mim}\{i:\alpha_i\neq\beta_i\}$，则我们有

$$0<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i-\alpha_i}{3^i}=\frac{\beta_k-\alpha_k}{3^k}+\sum_{i>k}\frac{\beta_i-\alpha_i}{3^i}$$

$$\leqslant\frac{\beta_k-\alpha_k}{3^k}+\sum_{i>k}\frac{2}{3^i}=\frac{\beta_k-\alpha_k+1}{3^k}.$$

由此可知$(\alpha_k<\beta_k)$ $\alpha_k=0$，$\beta_k=1$，从而得到

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}\right) &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\alpha_i}{2^i} + \sum_{i=k}^{\infty}\frac{\alpha_i}{2^i} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{2^i} + \sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{2^i} + \frac{1}{2^k} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{2^i} + \sum_{i=k}^{\infty}\frac{\beta_i}{2^i} = \varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{3^i}\right).
\end{aligned}
$$

(ii) 作定义在[0,1]上的 $\Phi(x)$。

对于 $x\in[0,1]$，定义

$$\Phi(x) = \sup\{\varphi(y): y\in C, y\leqslant x\}.$$

显然，$\Phi(x)$是[0,1]上的单调上升函数，因为$\Phi([0,1]) = [0,1]$，所以 $\Phi(x)$是[0,1]上的连续函数。此外，在构造 Cantor 集的过程中所移去的每个中央三分开区间 $I_{n,k}$ 上，$\Phi(x)$都是常数。我们称 $\Phi(x)$为 Cantor 函数。

§1.6 点集间的距离

定义1.32 设 $x\in \boldsymbol{R}^n$，E是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的非空点集，称

$$d(x,E) = \inf\{|x-y|: y\in E\}$$

为点 x 到 E 的距离。若 E_1,E_2是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的非空点集，称

$$d(E_1,E_2) = \inf\{|x-y|: x\in E_1,\ y\in E_2\}$$

为 E_1与 E_2之间的距离。也可等价地定义为

$$\inf\{d(x,E_2): x\in E_1\} \quad 或 \quad \inf\{d(E_1,y): y\in E_2\}.$$

例 在 $\boldsymbol{R}^2$ 中作点集

$$E_1 = \{x = (\xi,\eta): -\infty<\xi<\infty, \eta = 0\}$$

与

$$E_2 = \{y = (\xi,\eta): \xi\cdot\eta = 1\},$$

$d(E_1,E_2) = 0$。事实上，当我们取 $X = (\xi,0)\in E_1$且$y = (\xi,\eta)\in E_2$时，由不等式

$$d(E_1,E_2)\leqslant d(x,y) = |\eta| = \frac{1}{|\xi|}$$

可知,对任给 $\varepsilon>0$, 只需 $|\zeta|$ 充分大,就有 $d(E_1,E_2)<\varepsilon$. 由此得 $d(E_1,E_2)=0$.

显然,若 $x\in E$, 则 $d(x,E)=0$. 但反之,若 $d(x,E)=0$, 则 x 不一定属于 E. 不过在 $x\bar{\in}E$ 时, 必有 $x\in E'$.

定理 1.25 若 $F\subset\boldsymbol{R}^n$ 是非空闭集且 $x_0\in\boldsymbol{R}^n$, 则存在 $y_0\in F$, 使得

$$|x_0-y_0|=d(x_0,F).$$

证明 作闭球 $\bar{B}=\bar{B}(x_0,\delta)$, 使得 $\bar{B}\cap F$ 不是空集. 显然

$$d(x_0,F)=d(x_0,\bar{B}\cap F).$$

$\bar{B}\cap F$ 是有界闭集, 而 $|x_0-y|$ 看作定义在 $\bar{B}\cap F$ 上的 y 的函数是连续的, 故它在 $\bar{B}\cap F$ 上达到最小值, 即存在 $y_0\in\bar{B}\cap F$, 使得

$$|x_0-y_0|=\inf\{|x_0-y|:y\in\bar{B}\cap F\},$$

从而有 $|x_0-y_0|=d(x_0,F)$.

定理 1.26 若 E 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中非空点集, 则 $d(x,E)$ 作为 x 的函数在 $\boldsymbol{R}^n$ 上是一致连续的.

证明 考虑 $\boldsymbol{R}^n$ 中两点 x,y. 根据 $d(y,E)$ 的定义, 对任给 $\varepsilon>0$, 必存在 $z\in E$, 使得 $|y-z|<d(y,E)+\varepsilon$, 从而有

$$\begin{aligned}d(x,E)&\leqslant|x-z|\leqslant|x-y|+|y-z|\\&<|x-y|+d(y,E)+\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性, 可知

$$d(x,E)-d(y,E)\leqslant|x-y|.$$

同理可证 $d(y,E)-d(x,E)\leqslant|x-y|$. 这说明

$$|d(x,E)-d(y,E)|\leqslant|x-y|.$$

推论 1.27 若 F_1, F_2 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的两个非空闭集且其中至少有一个是有界的, 则存在 $x_1\in F_1,x_2\in F_2$, 使得

$$|x_1-x_2|=d(F_1,F_2).$$

例 若 F_1,F_2 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中两个互不相交的非空闭集, 则存在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的连续函数 $f(x)$, 使得

(i) $0\leqslant f(x)\leqslant 1(x\in\boldsymbol{R}^n)$;

(ii) $F_1 = \{x: f(x) = 1\}$, $F_2 = \{x: f(x) = 0\}$.

证明

$$f(x) = \frac{d(x, F_2)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}, \quad x \in \boldsymbol{R}^n$$

就是所求的函数。

定理 1.28（连续函数延拓定理） 若 F 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的闭集，$f(x)$ 是定义在 F 上的连续函数且 $|f(x)| \leqslant M (x \in F)$，则存在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$ 满足

$$|g(x)| \leqslant M, \quad g(x) = f(x), \quad x \in F.$$

证明 把 F 分成三个点集：

$$A = \left\{x: \frac{M}{3} \leqslant f(x) \leqslant M\right\},$$

$$B = \left\{x: -M \leqslant f(x) \leqslant \frac{-M}{3}\right\},$$

$$C = \left\{x: \frac{-M}{3} < f(x) < \frac{M}{3}\right\},$$

并作函数

$$g_1(x) = \left(\frac{M}{3}\right)\frac{d(x, B) - d(x, A)}{d(x, B) + d(x, A)}, \quad x \in \boldsymbol{R}^n.$$

因为 A 与 B 是互不相交的闭集，所以 $g_1(x)$ 处处有定义且在 $\boldsymbol{R}^n$ 上处处连续。此外还有

$$|g_1(x)| \leqslant \frac{M}{3}, \quad x \in \boldsymbol{R}^n,$$

$$|f(x) - g_1(x)| \leqslant \frac{2}{3}M, \quad x \in F.$$

再在 F 上来考察 $f(x) - g_1(x)$（相当于上述之 $f(x)$），并用类似的方法作 $\boldsymbol{R}^n$ 上的连续函数 $g_2(x)$，此时由于 $f(x) - g_1(x)$ 的界是 $2M/3$，故 $g_2(x)$ 应满足

$$|g_2(x)| \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)\frac{2M}{3}, \quad x \in \boldsymbol{R}^n,$$

$$|[f(x)-g_1(x)]-g_2(x)|\leqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}M=\left(\frac{2}{3}\right)^2M,\ x\in F.$$

继续这一过程，可得在 R^n 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$，使得

$$|g_k(x)|\leqslant\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}M,\ x\in R^n,\ k=1,2,\cdots,$$

$$\left|f(x)-\sum_{i=1}^{k}g_i(x)\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^kM, x\in F, k=1,2,\cdots.$$

上面的第一式表明

$$\sum_{k=1}^{\infty}g_k(x)$$

是一致收敛的，若记其和函数为 $g(x)$，则 $g(x)$ 是 R^n 上的连续函数；第二式表明

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k(x)=f(x), x\in F.$$

最后，对于任意的 $x\in R^n$，得到

$$|g(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|g_k(x)|\leqslant\frac{M}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\right)$$

$$\leqslant\frac{M}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=M.$$

注 上述定理在 $f(x)$ 无界时也成立(研究 $\operatorname{tg}^{-1}f(x)$)。

附 注

(一) 在 §1.1 中我们没有定义什么是集合，而是把它笼统地说成是某种对象，或满足某种条件的事物的整体等等，这在历史上也曾被认为是一种满意的说法。但在 20 世纪初，英国逻辑学家 Russell 提出了下述悖论(所谓悖论，是指这样一个命题 A，从 A 出发可以导出一个语句 B。然而，若假定 B 真，则可推知 B 不真；若假定 B 不真，又推知 B 真)：

"令 $X=\{E:E\notin E\}$。问集合 X 是否属于 X？"

这一悖论的说明可参阅关于无最大基数定理的证明.

悖论的出现不仅说明仅用某种条件或性质等来给集合以定义是不完善的，而且给数学基础带来了某种危机. 为了避免所发现的种种悖论，数学家们建立了各种集合论的公理系统，并由此推动了集合理论的发展，其中著名的有所谓 Z-F 公理系统.

本书所讨论的集合均非随意指定，一般都是指某个具体的全集(如 R^n) 中的子集. 这样，情况就比较简单.

(二) 连续统假设. 关于无限集的基数，从我们在正文中所举的例子来看，不是 $\aleph_0$ 就是 c，那末在 $\aleph_0$ 与 c 之间是否还有别的基数? 这一问题曾耗费了 Cantor 本人不少的精力，但并没有得出任何结论. 所谓连续统假设就是下述著名猜测: $\aleph_0$ 与 c 之间不存在别的基数. 虽经后继者的许多努力，也提出了若干等价的原则，但我们还没有一个绝对的观念来说这一猜测的真假. 不过在现今的 Z-F 集合论公理系统里，Godel 在 1940 年发表的文章中指出了连续统假设的相容性(即不能证明连续统假设的不真)，而在 1963 年 Cohn 又证明了它的独立性(即不能用其他公理给予证明). 因此，在目前最广泛采用的集合论公理系统中，这一问题就算有了一个解答. 当然，有的数学家认为: 应当有一个确定的集合的数学实现，使其中连续统假设是真或是假.

有兴趣的读者可参阅 Kuratowski, K. and Mostowski, A. 所著的书: Set Theory, PWN, Amsterdam, 1976.

习 题

1. 设 A, B, E 是全集 X 中的子集，试证明

$$B = (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) \Longleftrightarrow B^c = E.$$

2. 设 $\{A_n\}$ 与 $\{B_n\}$ 是递增集合列，试证明

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n).$$

3. 设有集合 A, B, E 和 F，试证明:

(i) 若 $A\cup B=E\cup F$, $A\cap F=\varnothing$ 以及 $B\cap E=\varnothing$, 则

$$A=E \text{ 且 } B=F;$$

(ii) 若 $A\cup B=E\cup F$, 令 $A_1=A\cap E$, $A_2=A\cap F$, 则

$$A_1\cup A_2=A.$$

√4. 设 $\{f_j(x)\}$ 是定义在 R^n 上的函数列,试用点集

$$\{x: f_j(x)\geqslant 1/k\},\ j,k=1,2,\cdots$$

表示点集 $\{x: \overline{\lim_{j\to\infty}} f_j(x)>0\}$.

5. 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数列, $E\subset[a,b]$ 且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\chi_{[a,b]\setminus E}(x),$$

若令 $E_n=\left\{x\in[a,b]: f_n(x)\geqslant\frac{1}{2}\right\}$, 试求集合 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$.

6. 设 $f: X\to Y$, $A\subset X$, $E\subset Y$, 试问下列等式成立吗?

(i) $f^{-1}(Y\setminus E)=f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(E)$;

(ii) $f(X\setminus A)=f(X)\setminus f(A)$.

7. 设有集合 A,B 与 C, 试证明:

(i) 若 $(A\setminus B)\sim(B\setminus A)$, 则 $A\sim B$;

(ii) 若 $A\subset B$, 且 $A\sim(A\cup C)$, 则 $B\sim(B\cup C)$.

8. 试作出 $R^1\setminus Q$ 与 R^1 之间的一一映射.

9. 试求全体超越数(即不是整系数方程

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

的根)构成的集合的基数.

10. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的实值函数,且存在常数 M, 使得对于 $[0,1]$ 中任意有限个数: $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 均有

$$|f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)|\leqslant M,$$

试证明下述集合是可数集:

$$E=\{x\in[0,1]: f(x)\neq 0\}.$$

11. 设 $f(x)$ 是定义在 R^1 上的实值函数. 如果对于任意的 x_0

$\in \boldsymbol{R}^1$，必存在 $\delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) \geqslant f(x_0)$，试证明集合 $E = \{y : y = f(x)\}$ 是可数集.

12. 设 E 是三维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中的点集，且 E 中任意两点的距离都是有理数，试证明 E 是可数集。

13. 试问在平面 $\boldsymbol{R}^2$ 中满足下述条件的直线的全体所构成的集的基数是什么：设 (x,y) 是直线上的点，若 $x \in Q$，则 $y \in Q$。

14. 设 E 是平面 $\boldsymbol{R}^2$ 中的可数集，试证明存在互不相交的集合 A 与 B，使得 $E = A \cup B$，且任一平行于 x 轴的直线交 A 至多是有限个点，任一平行于 y 轴的直线交 B 至多是有限个点。

15. 设 $E \subset \boldsymbol{R}^1$ 是可列集，试证明存在 $x_0 \in \boldsymbol{R}^1$，使得点集 E 与 $E + \{x_0\}$ 不相交： $E \cap (E + \{x_0\}) = \varnothing$，其中

$$E + \{x_0\} \equiv \{x + x_0 : x \in E\}.$$

16. 试给出 $(0,1] \times (0,1]$ 与 $(0,1]$ 之间的一一映射。

17. 设有集合关系 $E = A \cup B$，且 E 的基数是 c，试证明 A 与 B 中至少有一个集合的基数是 c.

18. 试证明 $\overline{\overline{\mathscr{P}(N)}} = c$。

19. 设 $E \subset \boldsymbol{R}^1$ 且 E 的基数小于或等于 c，试证明集合

$$\{x = (x_1, x_2, \cdots) : x_i \in E (i = 1, 2, \cdots)\} = A$$

的基数小于或等于 c。

20. 设 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，若 $\overline{\overline{E}} = c$，试证明存在 n_0，使得 $\overline{\overline{A}}_{n_0} = c$。

21. 试证明不存在如下之集合族 Γ：对任一集合 E，有 Γ 中的元 A，使得 $A \sim E$。

22. 设有集合 A 且 $A \times A \sim A$. 若 $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$，试证明：

$$A \cup B \sim A.$$

23. 问：是否存在集合 A，使得 $\mathscr{P}(A)$ 是可列集？

24. 记定义在 $\boldsymbol{R}^1$ 上一切实值函数全体为 Φ，试证明 Φ 不与 $\boldsymbol{R}^1$ 对等。

25. 设 $E \subset \boldsymbol{R}^1$. 若 E 的任一子集都是闭集，问 E 是有限集

吗？

26. 设X是无限集，$f:X\to X$，试证明存在X中的非空真子集E，使得$f(E)\subset E$。

27. 设有集合X，$f:\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(X)$，并且对于$X$的任意子集$A$与$B$，$A\subset B$，必有$f(A)\subset f(B)$，试证明存在$X$中子集$E$，使得$f(E)=E$。

28. 设$E\subset\boldsymbol{R}^n$，若E'是可数集，试证明E是可数集。

29. 设$f(x)$是定义在$\boldsymbol{R}^1$上的单调上升函数，试证明点集

$$E=\{x:对于任意的\varepsilon>0，有f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)>0\}$$

是$\boldsymbol{R}^1$中的闭集。

30. 设$F\subset\boldsymbol{R}^n$是有界闭集，E是F中一个无限子集，试证明：$E'\cap F\neq\varnothing$。反之，若$F\subset\boldsymbol{R}^n$且对于F中任一无限子集E，有$E'\cap F\neq\varnothing$，试证明F是有界闭集。

31. 设F是$\boldsymbol{R}^1$中的闭集，记E为F^c的构成区间中心点的全体，试证明：$E'\subset F'$。

32. 设$f\in C^1([a,b])$，令

$$E=\{x\in[a,b]:f(x)=0\}\cap\{x\in[a,b]:f'(x)>0\},$$

试证明E中任一点皆为E的孤立点。

33. 设A,B是$\boldsymbol{R}^1$中的点集，试证明

$$(A\times B)'=(\bar{A}\times B')\cup(A'\times\bar{B}).$$

34. 设$E\subset\boldsymbol{R}^n$。若$E\neq\varnothing$，且$E\neq\boldsymbol{R}^n$，试证明E之边界点集非空（即$\partial E\neq\varnothing$）。

35. 设G_1,G_2是$\boldsymbol{R}^n$中的互不相交的开集，试证明：

$$G_1\cap\bar{G}_2=\varnothing.$$

36. 设$G\subset\boldsymbol{R}^n$。若对任意的$E\subset\boldsymbol{R}^n$，有$G\cap\bar{E}\subset\overline{G\cap E}$，试证明$G$是开集。

37. 设$\{f_k(x)\}$是有界闭集$F\subset\boldsymbol{R}^n$上的非负连续函数列，且满足

$$f_k(x)>f_j(x),\quad k<j,\ x\in F;$$

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=0,\qquad x\in F.$$

试证明$\{f_k(x)\}$在F上一致收敛于零。

38．试问由$\boldsymbol{R}^1$中的一切开集构成的集族的基数是什么？

39．设$\{F_\alpha\}$是$\boldsymbol{R}^n$中的一族有界闭集，若任取其中有限个：$F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \cdots, F_{\alpha_m}$都有

$$\bigcap_{i=1}^{m} F_{\alpha_i}\neq\varnothing,$$

试证明：$\bigcap_{\alpha} F_\alpha\neq\varnothing$。

40．设$\{F_\alpha\}$是$\boldsymbol{R}^n$中的有界闭集族，G是开集且有

$$\bigcap_{\alpha} F_\alpha\subset G,$$

试证明$\{F_\alpha\}$中存在$F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \cdots, F_{\alpha_m}$，使得

$$\bigcap_{i=1}^{m} F_{\alpha_i}\subset G.$$

41．设$f(x)$是定义在$\boldsymbol{R}^1$上的实值函数．若对任意的$t\in\boldsymbol{R}^1$，点集

$$\{x: f(x)\geqslant t\}\ \text{与}\ \{x: f(x)\leqslant t\}$$

都是闭集，试证明$f(x)$是$\boldsymbol{R}^1$上的连续函数。

42．设$f(x)$是定义在$\boldsymbol{R}^1$上的可微函数，且对任意的$t\in\boldsymbol{R}^1$，点集$\{x\in\boldsymbol{R}^1: f'(x)=t\}$是闭集，试证明$f'(x)$是$\boldsymbol{R}^1$上的连续函数。

43．设$\{f_n(x)\}$是定义在$\boldsymbol{R}^1$上的连续函数列，试证明点集

$$\{x: \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)>0\}$$

是F_σ集，

44．设$f(x)$是定义在$\boldsymbol{R}^1$的函数，试证明点集

$$\{x\in\boldsymbol{R}^1: \lim_{y\to x} f(y)\text{存在}\}$$

是 G_δ 型集。

45*. 设 $f:[a,b]\mapsto \boldsymbol{R}^1$，作

$$G_f=\{(x,f(x)):x\in[a,b]\},$$

若 G_f 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的紧集，则 $f\in C([a,b])$。

46. 试证明 $\boldsymbol{R}^1$ 中的可数稠密集不是 G_δ 型集。

47. 试证明在[0,1]上不能定义如下之函数 $f(x)$：在有理数上连续，在无理数上不连续。

48. 试证明不存在满足下列条件的函数 $f(x,y)$：

(i) $f(x,y)$是 $\boldsymbol{R}^2$ 上的连续函数；

(ii) 偏导数$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$，$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$在 $\boldsymbol{R}^2$ 上处处存在；

(iii) $f(x,y)$在 $\boldsymbol{R}^2$ 的任一点上都不可微。

49. 设 $f(x)$是定义在[0,1]上的连续函数，令

$$f_1'(x)=f(x),\ f_2'(x)=f_1(x),\cdots,f_k'(x)=f_{k-1}(x),\cdots.$$

若对任意的 $x\in[0,1]$，存在 k，使得 $f_k(x)=0$，试证明：

$$f(x)=0\ (x\in[0,1]).$$

50. 设 G_0 是 $\boldsymbol{R}^1$ 中的 G_δ 型集，试作 $\boldsymbol{R}^1$ 上的函数，它的连续点集就是 G_0。

51. 设 $F\subset\boldsymbol{R}^1$ 是闭集，G_n $(n=1,2,\cdots)$ 是 $\boldsymbol{R}^1$中的开集列，且有$\overline{G_n\cap F}=F$ $(n=1,2,\cdots)$，试证明

$$\overline{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\right)\cap F}=F.$$

52. 设 $F\subset\boldsymbol{R}^1$ 是可数的非空闭集，试证明F必含有孤立点。

53. 试证明点 $x=\frac{1}{4},\frac{1}{13}$属于 Cantor 集。

54. 设 $E\subset\boldsymbol{R}^n$，若对任意的 $x\in\boldsymbol{R}^n$，存在 $y\in E$，使得 $d(x,y)=d(x,E)$，试证明 E 是闭集。

55. 设$\{F_k\}$是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的非空闭集列，$x_0\in\boldsymbol{R}^n$。若

$$\lim_{k\to\infty}d(x_0,F_k)=\infty,$$

试证明$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$是闭集。

56. 设G是$\boldsymbol{R}^n$中的开集，试作$\boldsymbol{R}^n$上的连续函数序列$\{g_k(x)\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \chi_G(x), \qquad x\in \boldsymbol{R}^n.$$

57. 设$F_1, F_2\subset \boldsymbol{R}^n$是两个互不相交的闭集，试证明存在开集$G$与$H$，$G\supset F_1$且$H\supset F_2$，使得$G\cap H=\varnothing$。

58. 试证明$\boldsymbol{R}^n$中任一闭集皆为G_δ集，任一开集皆为F_σ集。

59*. 设$F\subset \boldsymbol{R}^n$是有界闭集，$G_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$是$\boldsymbol{R}^n$中的开集且有

$$F\subset \bigcup_{i=1}^{k} G_i.$$

试作闭集$F_i(i=1,2,\cdots,k)$，使得

$$F=\bigcup_{i=1}^{k} F_i, \qquad F_i\subset G_i, \qquad i=1,2,\cdots,k.$$

60. 设$F\subset \boldsymbol{R}^n$是闭集，试作函数列$f_k\in C(\boldsymbol{R}^n)(k=1,2,\cdots)$，使得

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \chi_F(x), \qquad x\in \boldsymbol{R}^n.$$

√61. 设$E\subset \boldsymbol{R}^1$，试证明$\chi_E(x)$是连续函数列的极限，当且仅当$E$同时是$F_\sigma$与$G_\delta$集。

√62*. 设C为$[0,1]$中的Cantor集，试证明

$$C+C=\{x+y: x\in C,\ y\in C\}=[0,2].$$

√63. 设$\{F_\alpha: \alpha\in I\}$是$\boldsymbol{R}^1$中的一个闭集族，且对任意的$\alpha,\beta\in I$，有

$$F_\alpha\subset F_\beta \text{ 或 } F_\beta\subset F_\alpha.$$

试证明$F_0=\bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha$是$F_\sigma$型集或是闭集。

√64*. 设$f\in C([a,b])$，D是$[a,b]$中的可数子集。若对任意

的$x\in[a,b)\backslash D$，都存在 $\delta>0$，使得

$$f(y)>f(x),\quad y\in(x,x+\delta).$$

试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增.

65*. 点集 $E=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2: x^2+y^2<1\}$ 是平面上的开圆，试问 E 可以表成可列个互不相交的闭圆的并集吗?

66. 设 $E\subset[0,1]$，且 $f\in C(E)$. 试作函数 $g\in C([0,1])$，使得

$$g(x)|_{x\in E}=f(x).$$

67. 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots\}$ 是两个自然数子列，若有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0,$$

则称 B 是比 A 增长更快的数列.

现在，设 S 是由某些自然数子列构成的数列族，且对于任一自然数子列 A，均有 $B\in S$，使得 B 比 A 增长更快. 试证明 S 是不可数集.

68. 设 F 是 $\boldsymbol{R}^1$ 中的闭集，试作 $\boldsymbol{R}^1$ 上的单调上升函数 $f(x)$，且 $f'\in C(\boldsymbol{R}^1)$，使得 $F=\{x\in\boldsymbol{R}^1: f'(x)=0\}$.

69. 设 $f\in C(\boldsymbol{R}^1)$. 若对任给的 $\varepsilon>0$，有 $f(n\varepsilon)\to 0\,(n\to\infty)$，试证明 $f(x)\to 0\ (x\to\infty)$.

70*. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上无穷次可微，若对每个 $x\in[0,1]$，存在自然数 $n=n_x$，使得 $f^{(n)}(x)=0$，试证明 $f(x)$ 是一个多项式.

71*. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上无穷次可微，且其 Taylor 级数在每个 $x\in(a,b)$ 上有一个正收敛半径，试证明 $f(x)$ 在某个子区间上是解析的($f(x)$在点 x_0 处解析，是指其 Taylor 级数在某个 x_0 的邻域中收敛到 $f(x)$).

第二章 Lebesgue 测度

从本章开始，将逐步介绍实变函数理论的中心内容——Lebesgue 测度与积分。

19 世纪的数学家们已经认识到，仅有连续函数与积分的古典的理论已不足于解决数学分析中的许多问题。为了克服古典 Riemann 积分在理论上的局限性(见引言)，必须改造原有的积分定义。大家知道，对于 $[a, b]$ 上的正值连续函数 $f(x)$，其积分的几何意义是平面曲边梯形

$$\underline{G}(f) = \{(x, y): x \in [a, b],\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

的面积。因此，积分的定义以及一个函数的可积性，是与相应的平面图形面积如何确定以及面积是否存在密切相关。从这一个角度看问题，过去我们所说的不可积函数 f，就反映在平面点集 $\underline{G}(f)$ 的面积不存在的问题上。于是，如果我们想要建立能够应用于更大函数类的新的积分理论，自然希望把原有的面积概念加以推广，以使得更多的点集能具有类似于面积性质的新的量度。

总之，我们希望对一般 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点集 E 给予一种量度，它是长度、面积以及体积的概念的推广。如果记点集 E 的这种量度为 $m(E)$，那末自然应要求它具有某些常见的性质和满足一定的条件。此时，称 $m(E)$ 为 E 的测度。以 $\boldsymbol{R}^1$ 为例，我们提出：

(i) $m(E) \geqslant 0$；

(ii) 可合同的点集具有相同的测度；

(iii) 令 $I = (a, b)$，则 $m(I) = b - a$；

(iv) 若 $E_1, E_2, \cdots, E_k, \cdots$ 是互不相交的点集，则

$$m\left(\sum_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

条件(i)—(iii)是容易理解的。条件(iv)称为可数可加性。(历史上还创立过其他种类的测度，例如所谓 Jordan 测度，但它只具备有限可加性。) 正是这种可数可加性使建立在测度论基础上的积分有了新的功能。

1898年，Borel 建立了 $\boldsymbol{R}^1$ 中点集(现在称为 Borel 集) 的测度理论。不久，Lebesgue 在1902年提出了直至目前仍广泛应用的 "Lebesgue 测度" 理论。后来，Carathéodory 在1918 年左右深入地研究了外测度的性质，从此，测度理论有了迅速的发展。

不同的积分概念是基于或紧密地联系于不同的测度概念的。测度理论及其方法在近代分析、概率论以及其他一些学科领域中已成为必不可少的工具。在后续的各章中我们将看到，Lebesgue 测度理论还为实变函数的许多其它课题(例如单调函数的不可微点，Riemann 可积函数等等) 的研究提供了适当的框架与基石。本章的目的就是介绍 $\boldsymbol{R}^n$ 中点集的 Lebesgue 测度理论。

§2.1 点集的Lebesgue外测度

为了在 $\boldsymbol{R}^n$ 上建立 Lebesgue 的测度理论，我们先给出点集的外测度概念。

定义2.1 设 $E\subset\boldsymbol{R}^n$。若$\{I_k\}$是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的可数个开矩体

$$E\subset\bigcup_{k\geq1}I_k,$$

则称$\{I_k\}$为E的一个 L-覆盖(显然这样的覆盖有很多，且每一个 L-覆盖$\{I_k\}$ 确定一个非负广义实值$\sum\limits_{k\geq1}|I_k|$ (可以是 $+\infty$，$|I_k|$ 表示 I_k 的体积)。我们称

$$m^*(E)=\inf\left\{\sum_{k\geq1}|I_k|:\{I_k\}\text{ 为 }E\text{ 的 }L\text{-覆盖}\right\}$$

为点集 E 的 Lebesgue 外测度①。

显然，若 E 的任意的 L-覆盖 $\{I_k\}$ 均有

$$\sum_{k\geq 1}|I_k|=\infty,$$

则 $m^*(E)=\infty$，否则 $m^*(E)<\infty$。

例 $\mathbf{R}^n$ 中的单点集的外测度为零，即 $x_0\in\mathbf{R}^n$，$m^*(\{x_0\})=0$。这是因为可作一开矩体 I，使得 $x_0\in I$ 且 $|I|$ 可任意地小。同理，$\mathbf{R}^n$ 中的点集

$$\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{i-1},t_0,\xi_i,\cdots,\xi_n):a_j\leqslant\xi_j\leqslant b_j,j\neq i\}$$

（$n-1$ 维超平面块）的外测度也为零。

例 设 I 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开矩体，$\bar{I}$ 是闭矩体，则 $m^*(\bar{I})=|I|$。事实上，对任给的 $\varepsilon>0$，作一开矩体 J，使得 $J\supset\bar{I}$ 且 $|J|<|I|+\varepsilon$，从而有

$$m^*(\bar{I})\leqslant|J|<|I|+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知 $m^*(\bar{I})\leqslant|I|$。现在设 $\{I_k\}$ 是 $\bar{I}$ 的任意的 L-覆盖，则因 $\bar{I}$ 是有界闭集，所以存在 $\{I_k\}$ 的有限子覆盖

$$\{I_{i_1},I_{i_2},\cdots,I_{i_l}\}\qquad\bigcup_{j=1}^{l}I_{i_j}\supset I.$$

易知

$$|I|\leqslant\sum_{j=1}^{l}|I_{i_j}|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|,$$

---

① 在本定义中，对 E 所作的覆盖 $\{I_k\}$ 不仅限于有限个而且可以是可列个。为了说明这一区别，我们来分析一下有理数集Q的情形。

设 $Q=\{r_n\}$ 是[0,1]中的有理数集，任给 $\varepsilon>0$，作区间

$$\left(r_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},\quad r_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)\quad n=1,2,\cdots,$$

显然，这些区间的全体覆盖了Q，而这些区间长度的总和是 ε。由于 $\varepsilon>0$ 是任意给定的，当然就认为有理点集Q的测度是零。但若只允许我们用有限个区间去覆盖，则根据Q在[0,1]中的稠密性，这些区间必须覆盖除有限个点外整个区间[0,1]。也就是说这些区间长度的总和起码是1，对于[0,1]中的无理点集也可得出相同的结论，从而只能说有理点集Q是不可度量的了。

由此又得$|I|\leqslant m^*(\bar{I})$。从而我们有 $m^*(\bar{I})=|I|$。

定理2.1（$\boldsymbol{R}^n$ 中点集的外测度性质）

(i) 非负性：$m^*(E)\geqslant 0$，$m^*(\phi)=0$；

(ii) 单调性：若 $E_1\subset E_2$，则 $m^*(E_1)\leqslant m^*(E_2)$；

(iii) 次可加性：$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)$。

证明 (i) 这可从定义直接得出。

(ii) 这是因为 E_2 的任一个 L-覆盖都是 E_1 的 L-覆盖。

(iii) 不妨设$\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)<\infty$。对任意的$\varepsilon>0$以及每个自然数 k，存在 E_k 的 L-覆盖$\{I_{k,l}\}$，使得

$$E_k\subset\bigcup_{l=1}^{\infty}I_{k,l},\quad \sum_{l=1}^{\infty}|I_{k,l}|<m^*(E_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

由此可知

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\subset\bigcup_{k,l=1}^{\infty}I_{k,l},\quad \sum_{k,l=1}^{\infty}|I_{k,l}|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)+\varepsilon.$$

显然，$\{I_{k,l}:k,l=1,2,\cdots\}$ 是$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 的 L-覆盖，从而有

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知结论成立。

例 若 I 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开矩体，则

$$m^*(I)=m^*(\bar{I})=|I|.$$

推论2.2 若 $E\subset\boldsymbol{R}^n$ 为可数点集，则 $m^*(E)=0$。

由此可知有理点集的外测度 $m^*(\mathbf{Q}^n)=0$。这里我们看到了一

个虽然处处稠密但外测度为零的可列点集。但下例说明外测度为零的点集不一定是可列集。

例 $[0,1]$中的 Cantor 集C的外测度是零。

事实上，因为

$$C=\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

其中的F_n(在构造C的过程中第n步所留存下来的)是2^n个长度为3^{-n}的闭区间之并集，所以我们有

$$m^*(C)\leqslant m^*(F_n)\leqslant 2^n\cdot 3^{-n},$$

从而得知$m^*(C)=0$。

注意，对于$\boldsymbol{R}^n$中的任意两个点集E_1与E_2，根据外测度的次可加性，可以得出

$$m^*(E_1\cup E_2)\leqslant m^*(E_1)+m^*(E_2).$$

不过上式中的等号不一定成立，即使$E_1\cap E_2=\varnothing$也是如此(这一点在下一节还要再谈及)。但若$d(E_1,E_2)>0$,则上式中等号就成立了。这称为距离外测度性质。为证此，先介绍一个引理。

引理2.3 设$E\subset\boldsymbol{R}^n$以及$\delta>0$。令

$$m_\delta^*(E)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|:\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\supset E,\ \text{每个开矩体}\ I_k\ \text{的边长}<\delta\right\},$$

则$m_\delta^*(E)=m^*(E)$。

证明 显然有$m_\delta^*(E)\geqslant m^*(E)$。为证明其反向不等式也成立，不妨设$m^*(E)<\infty$。由外测度的定义可知，对于任给的$\varepsilon>0$，存在$E$的$L$-覆盖$\{I_k\}$，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\leqslant m^*(E)+\varepsilon.$$

对于每个k，我们把I_k分割成$l(k)$个开矩体：

$$I_{k,1},\ I_{k,2},\ \cdots,\ I_{k,l(k)},$$

它们互不相交且每个开矩体的边长都小于$\delta/2$。现在保持每个

$I_{k,i}$ 的中心不动，边长扩大 $\lambda(1 < \lambda < 2)$ 倍作出开矩体，并记为 $\lambda I_{k,i}$。显然对每个 k 有

$$\bigcup_{i=1}^{l(k)} \lambda I_{k,i} \supset I_k, \quad \sum_{i=1}^{l(k)} |\lambda I_{k,i}| = \lambda^n \sum_{i=1}^{l(k)} |I_{k,i}| = \lambda^n |I_k|.$$

易知 $\{\lambda I_{k,i}: i = 1,2,\cdots,l(k); k = 1,2,\cdots\}$ 是 E 的边长小于 δ 的 L- 覆盖，且有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{l(k)} |\lambda I_{k,i}| = \lambda^n \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leqslant \lambda^n (m^*(E) + \varepsilon),$$

从而可知 $m_\delta^*(E) \leqslant \lambda^n (m^*(E) + \varepsilon)$。令 $\lambda \to 1$ 并注意到 ε 的任意性，我们得到 $m_\delta^*(E) \leqslant m^*(E)$。这说明 $m_\delta^*(E) = m^*(E)$。

定理 2.4 设 E_1, E_2 是 $\mathbf{R}^n$ 中两个点集。若 $d(E_1, E_2) > 0$，则

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2).$$

证明 只需证明 $m^*(E_1 \cup E_2) \geqslant m^*(E_1) + m^*(E_2)$ 即可。为此，不妨设 $m^*(E_1 \cup E_2) < \infty$。对任给的 $\varepsilon > 0$，作 $E_1 \cup E_2$ 的 L-覆盖 $\{I_k\}$，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon,$$

其中 I_k 的边长都小于 $d(E_1, E_2)/\sqrt{n}$。现在将 $\{I_k\}$ 分为如下两组：

1. $J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, \quad \bigcup_{k \geqslant 1} J_{i_k} \supset E_1;$

2. $J_{l_1}, J_{l_2}, \cdots, \bigcup_{k \geqslant 1} J_{l_k} \supset E_2,$

且其中任一矩体皆不能同时含有 E_1 与 E_2 中之点，从而得

$$m^*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon > \sum_{k \geqslant 1} |I_k| = \sum_{k \geqslant 1} |J_{i_k}| + \sum_{k \geqslant 1} |J_{l_k}|$$
$$\geqslant m^*(E_1) + m^*(E_2).$$

再由 ε 之任意性可知 $m^*(E_1 \cup E_2) \geqslant m^*(E_1) + m^*(E_2)$。

定理 2.5（平移不变性） 设 $E\subset R^n, x_0\in R^n$. 令

$$E+\{x_0\}=\{x+x_0, x\in E\},$$

则

$$m^*(E+\{x_0\})=m^*(E). \tag{2.1}$$

证明 首先，对于 R^n 中的开矩体 I 易知，$I+\{x_0\}$ 仍是一个开矩体且其相应边长均相等．$|I|=|I+\{x_0\}|$．其次，对 E 的任意的 L-覆盖 $\{I_k\}$，$\{I_k+\{x_0\}\}$ 仍是 $E+\{x_0\}$ 的 L-覆盖．从而由

$$m^*(E+\{x_0\})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|I_k+\{x_0\}|=\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|$$

可知(对一切 L-覆盖取下确界)，

$$m^*(E+\{x_0\})\leqslant m^*(E).$$

反之，考虑对 $E+x_0$ 作向量 $-x_0$ 的平移，可得原点集 E．同理又有

$$m^*(E)\leqslant m^*(E+\{x_0\}).$$

注 上面介绍的 R^n 中点集的外侧度其实是一种定义在 $\mathscr{P}(R^n)$ 上的集合函数(取广义实值)，即对每一个 $E\subset R^n$，对应于一个广义实值 $m^*(E)$．当然，它还具有一些性质．一般地说，设 X 是一个非空集合，μ^* 是定义在幂集 $\mathscr{P}(X)$ 上的一个取广义实值的集合函数，且满足

(i) $\mu^*(\varnothing)=0$; $\mu^*(E)\geqslant 0$ $(E\subset X)$;

(ii) 若 $E_1, E_2\subset X$, $E_1\subset E_2$，则 $\mu^*(E_1)\leqslant\mu^*(E_2)$;

(iii) 若 $\{E_n\}$ 是 X 的子集列，则有

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n).$$

那末，我们就称 μ^* 是 X 上的一个外测度．

若 (X,d) 是一个距离空间，且其上外测度 μ^* 还满足

$$\mu^*(E_1\cup E_2)=\mu^*(E_1)+\mu^*(E_2),$$

当 $d(E_1,E_2)>0$ 时．那末，称 μ^* 是 X 上的一个距离外测度(利

用距离外测度性质可以证明开集的可测性)。

§2.2 可测集．测度

上一节指出，R^n 中点集的 Lebesgue 外测度具有次可加性．事实上，可以举例说明 R^n 中存在互不相交的集合列 $E_1, E_2, \cdots, E_k, \cdots$，使得

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) < \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$$

(例如用后文中的不可测集来构造)，即不满足可数可加性．这样，集合函数 m^* 还不是我们所希望的 R^n 上点集的测度．那末，是否存在其他集合函数可以满足要求呢？(注意，这里仍需保持本章前言中所叙述的条件) 结论是否定的．这就是说，在我们所指的意义下，实际上不可能给出一种在 R^n 的一切子集上都有定义的测度．也就是说，某些点集不存在测度或说是不可测的．于是，我们的任务就是要在 Lebesgue 外测度的基础上，在 R^n 中诱导出一个可测集合类，在其上 m^* 是一种所期望的测度(实践证明，这对多数的应用课题来说已是足够的了)．因此，直接引用可加性条件来定义可测集是不难理解的了．

首先，我们想到 R^n 中的任一矩体 I 应当属于这一可测集合类．因此，若点集 $E \subset R^n$ 也属于可测集合类，则根据可加性应有(见图 2.1)

$$m^*(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \cap E^c).$$

这一等式本可作为 E 是可测集的定义．不过，由于我们实际上还可由此证明：对 R^n 中的任一点集 T，有

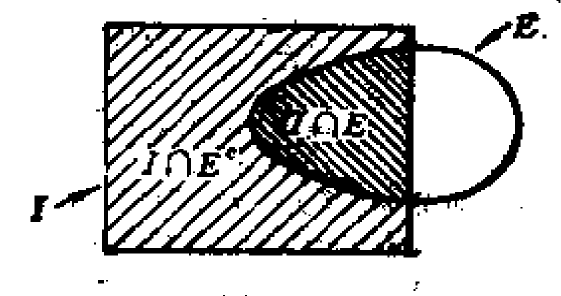


图 2.1

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)①.$$

从而下面当定义E为可测集时，将不采用矩体（这是 $\boldsymbol{R}^n$ 中特有的点集）作"试验集"，而代之以一般点集。这样做可使我们的定义推广于抽象测度。

定义 2.2 设 $E \subset \boldsymbol{R}^n$。若对任意的点集 $T \subset \boldsymbol{R}^n$，有

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)②, \tag{2.2}$$

则称E为 Lebesgue 可测集（或 m^*- 可测集），简称为可测集。其中T称为试验集（这一定义可测集的等式也称为 Carathéodory 条件）；可测集的全体称为可测集类，简记为$\mathscr{M}$。

有了可测集的定义，我们下面就要来探讨可测集的性质与结构。在这之前，注意到下述简单事实是有用的。即对于 $\boldsymbol{R}^n$ 中任一点集 E，为了证明它是一个可测集，我们只需对任一点集 $T \subset \boldsymbol{R}^n$ 证明

$$m^*(T) \geqslant m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \tag{2.3}$$

即可。这是因为 $m^*(T) \leqslant m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$ 总是成立的。由此又可知，只需对 $m^*(T) < \infty$ 的T来论证 (2.3) 式即可，因为在 $m^*(T) = \infty$ 时 (2.3) 式总成立。

例 若 $m^*(E) = 0$，则 $E \in \mathscr{M}$。事实上，此时我们有

---

① 事实上，对任给的 $\varepsilon > 0$，存在T的 L-覆盖 $\{I_k\}$，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leqslant m(T) + \varepsilon.$$

从而有

$$\begin{aligned} m^*(T) &\leqslant m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \\ &\leqslant m^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \cap E\right) + m^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \cap E^c\right) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} [m^*(I_k \cap E) + m^*(I_k \cap E^c)] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leqslant m^*(T) + \varepsilon. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$，即得 $m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$。

② 当年，Lebesgue 对 $E \subset [a,b]$ 引进了内测度的概念：$m_*(E) = (b-a) - m^*([a,b] \setminus E)$，并以条件 $m^*(E) = m_*(E)$ 来定义可测集。这相当于 (2.2) 式中取 $T = [a,b]$。

$$m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)\leqslant m^*(E)+m^*(T)=m^*(T).$$

外测度为零的点集称为零测集。显然，$\boldsymbol{R}^n$ 中由单个点组成的点集是零测集。从而根据外测度的次可加性知道 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有理点集 Q^n 是零测集。零测集中的任一子集是零测集。由此再注意到 Cantor 集是零测集这一事实，不难推断 $\mathscr{M}$ 的基数大于或等于 $2^{\aleph}$，但 $\mathscr{M}$ 的基数又不会超过 $2^{\aleph}$，于是 $\mathscr{M}$ 的基数实际上是 $2^{\aleph}$。

上一节曾经提到两个集合即使不相交，其外测度也不一定是可加的。现在可测集的定义暗示我们，两个集合由一个可测集分离开来，其外测度就有可加性：若 $E_1\subset S$，$E_2\subset S^c$，$S\in\mathscr{M}$，则有

$$m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2).$$

事实上，此时取试验集 $T=E_1\cup E_2$，从 S 是可测集的定义得

$$\begin{aligned}m^*(E_1\cup E_2)&=m^*((E_1\cup E_2)\cap S)\\&\quad+m^*((E_1\cup E_2)\cap S^c)\\&=m^*(E_1)+m^*(E_2).\end{aligned}$$

由此还可知，当 E_1 与 E_2 是互不相交的可测集时，对任一集合 T 有

$$m^*(T\cap(E_1\cup E_2))=m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_2).$$

定理2.6（可测集的性质）

(i) $\varnothing\in\mathscr{M}$；

(ii) 若 $E\in\mathscr{M}$，则 $E^c\in\mathscr{M}$；

(iii) 若 $E_1\in\mathscr{M}$，$E_2\in\mathscr{M}$，则 $E_1\cup E_2$，$E_1\cap E_2$ 以及 $E_1\setminus E_2$ 皆属于 $\mathscr{M}$；（由此知，可测集任何有限次取交，并运算后所得的集皆为可测集。）

(iv) 若 $E_i\in\mathscr{M}\ (i=1,2,\cdots)$，则其并集也属于 $\mathscr{M}$；若进一步有 $E_i\cap E_j=\varnothing\ (i\neq j)$，则

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*(E_i).$$

即 m^* 在 $\mathscr{M}$ 上满足可数可加性（或称为 σ-可加性）。

证明 (i) 显然成立。

(ii) 注意到$(E^c)^c=E$，从定义可立即得出结论。

(iii) 对于任一集$T\subset \mathbf{R}^n$，根据集合分解(参阅图2.2)与外测度的次可加性，我们有

$$\begin{aligned}m^*(T)&\leqslant m^*(T\cap(E_1\cup E_2))+m^*(T\cap(E_1\cup E_2)^c)\\&=m^*(T\cap(E_1\cup E_2))+m^*((T\cap E_1^c)\cap E_2^c)\\&\leqslant m^*((T\cap E_1)\cap E_2)+m^*((T\cap E_1)\cap E_2^c)\\&\quad+m^*((T\cap E_1^c)\cap E_2)+m^*((T\cap E_1^c)\cap E_2^c).\end{aligned}$$

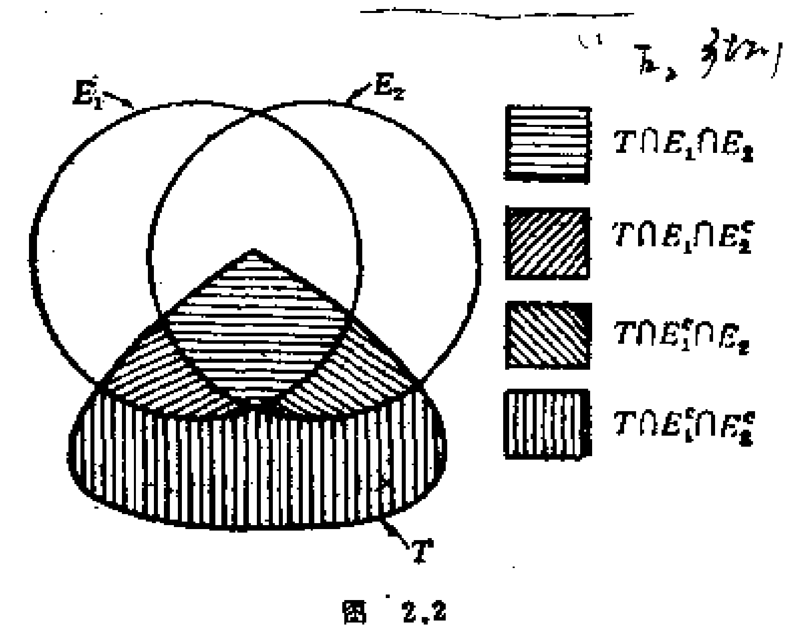


图 2.2

又由E_1，E_2的可测性知，上式右端就是

$$m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_1^c)=m^*(T).$$

这说明

$$m^*(T)=m^*(T\cap(E_1\cup E_2))+m^*(T\cap(E_1\cup E_2)^c).$$

也就是说$E_1\cup E_2$是可测集。

为证$E_1\cap E_2$是可测集，只需注意$E_1\cap E_2=(E_1^c\cup E_2^c)^c$即可。又由

$$E_1\setminus E_2=E_1\cap E_2^c$$

可知，$E_1\setminus E_2$是可测集。

(iv) 首先，设$E_1,E_2,\cdots,E_i,\cdots$皆互不相交，并令

$$S=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\quad S_k=\bigcup_{i=1}^{k}E_i,\quad k=1,2,\cdots.$$

由(iii)知每个S_k都是可测集。从而对任一集T我们有

$$\begin{aligned}m^*(T)&=m^*(T\cap S_k)+m^*(T\cap S_k^c)\\&=m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k}(T\cap E_i)\right)+m^*(T\cap S_k^c)\\&=\sum_{i=1}^{k}m^*(T\cap E_i)+m^*(T\cap S_k^c).\end{aligned}$$

由于$T\cap S_k^c\supset T\cap S^c$可知，

$$m^*(T)\geqslant\sum_{i=1}^{k}m^*(T\cap E_i)+m^*(T\cap S^c).$$

令$k\to\infty$，就有

$$m^*(T)\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap E_i)+m^*(T\cap S^c).$$

由此可得

$$m^*(T)\geqslant m^*(T\cap S)+m^*(T\cap S^c).$$

这说明$S\in\mathscr{M}$。

此外，在公式

$$m^*(T)\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap E_i)+m^*(T\cap S^c)$$

中以$T\cap S$替换T，则又可得

$$m^*(T\cap S)\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap E_i).$$

但反向不等式总是成立的。因而实际上有

$$m^*(T\cap S)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap E_i).$$

在这里再取T为全空间$\boldsymbol{R}^n$，就可证明可数可加性质：

$$m^*(S)=m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*(E_i).$$

其次，对于一般的可测集列$\{E_i\}$，我们令，

$$S_1=E_1,\quad S_k=E_k\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{k-1}E_i\right),\quad k\geqslant 2,$$

则$\{S_k\}$是互不相交的可测集列。而由

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{k=1}^{\infty}S_k$$

可知，$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$是可测集。

从定理的结论(i)，(ii)以及(iv)可知，$\boldsymbol{R}^n$中可测集类构成一个σ-代数，对于可测集E，其外测度称为测度，记为$m(E)$，这就是通常所说的$\boldsymbol{R}^n$上的Lebesgue 测度。

注 一般说来，设X是非空集合，$\mathscr{A}$是X中的一些子集构成的σ-代数。若μ是定义在$\mathscr{A}$上的一个集合函数，且满足

(i) $0\leqslant\mu(E)\leqslant\infty\ (E\in\mathscr{A})$；

(ii) $\mu(\varnothing)=0$；

(iii) μ在$\mathscr{A}$上是可数可加的，

则称μ是$\mathscr{A}$上的测度。$\mathscr{A}$中的元素称为(μ)可测集，序组$(X,\mathscr{A},\mu)$称为测度空间。本节所建立的就是$(\boldsymbol{R}^n,\mathscr{M},m)$。

定理2.7 若有递增可测集合列$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_k\cdots$，则

$$m\left(\lim_{k\to\infty}E_k\right)=\lim_{k\to\infty}m(E_k).\tag{2.4}$$

证明 若存在k_0，使$m(E_{k_0})=+\infty$，则定理自然成立。现在假定对一切k，有$m(E_k)<\infty$。由假设$E_k\in\mathscr{M}\ (k=1,2,\cdots)$，故$E_{k-1}$与$E_k-E_{k-1}$是互不相交的可测集。由测度的可加性知

$$m(E_{k-1})+m(E_k-E_{k-1})=m(E_k).$$

因为$m(E_{k-1})$是有限的，所以移项得

$$m(E_k-E_{k-1})=m(E_k)-m(E_{k-1}).$$

令$E_0=\varnothing$，可得

$$\lim_{k\to\infty}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k-E_{k-1}).$$

再应用测度的可数可加性，我们有

$$m\left(\lim_{k\to\infty}E_k\right)=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k-E_{k-1})\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(m(E_k)-m(E_{k-1}))$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}(m(E_i)-m(E_{i-1}))$$

$$=\lim_{k\to\infty}m(E_k).$$

推论2.8 若有递减可测集合列 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_k\supset\cdots$ 且 $m(E_1)<\infty$，则

$$m\left(\lim_{k\to\infty}E_k\right)=\lim_{k\to\infty}m(E_k). \tag{2.5}$$

证明 显然，$\lim\limits_{k\to\infty}E_k$ 是可测集且 $\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)$ 是有定义的。因为

$$E_1\setminus E_k\subset E_1\setminus E_{k+1},\qquad k=2,3,\cdots,$$

所以 $\{E_1\setminus E_k\}$ 是递增集合列。于是由上述定理可知

$$m\left(E_1\setminus\lim_{k\to\infty}E_k\right)=m\left(\lim_{k\to\infty}(E_1\setminus E_k)\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}m(E_1\setminus E_k).$$

由于 $m(E_1)<\infty$，故上式可写为

$$m(E_1)-m\left(\lim_{k\to\infty}E_k\right)=m(E_1)-\lim_{k\to\infty}m(E_k).$$

消去 $m(E_1)$，我们有

$$m\left(\lim_{k\to\infty}E_k\right)=\lim_{k\to\infty}m(E_k).$$

例 若有可测集列 $\{E_k\}$ 且有

$$\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k)<\infty,$$

则 $m\left(\overline{\lim_{k\to\infty}}E_k\right)=0$。

证明

$$m\left(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k\right)=\lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right)$$

$$\leqslant \lim_{k\to\infty}\sum_{i=k}^{\infty} m(E_i)=0.$$

§2.3 可测集与Borel集

在上一节的前言中，曾经提到 R^n 中的开集应为可测集。本节将证明这一点。从而立即可知凡 Borel 集都是可测集。本节还将讨论一般可测集与 Borel 集的关系。这一关系揭示出可测集的某种结构，有助于进一步了解可测集的性质。

定理2.9 R^n中的开矩体

$$I=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_n,b_n)$$

是可测集。

证明 取正数列$\delta_1>\delta_2>\cdots>\delta_k>\cdots$，且 $\lim_{k\to\infty}\delta_k=0$，作含于 I 内的矩体(见图2.3)

$$I_k=(a_1+\delta_k,b_1-\delta_k)\times(a_2+\delta_k,b_2-\delta_k)\times\cdots$$
$$\times(a_n+\delta_k,b_n-\delta_k).$$

现在，对于任意的$T\subset R^n$，由于

$$d(T\cap I_k,T\cap I^c)\geqslant\delta_k>0,$$

故根据定理2.4，可知

$$m^*(T)\geqslant m^*((T\cap I_k)\cup(T\cap I^c))$$
$$=m^*(T\cap I_k)+m^*(T\cap I^c).$$

令$k\to\infty$，就得到

$$m^*(T)\geqslant m^*(T\cap I)+m^*(T\cap I^c),$$

即$I\in\mathscr{M}$。在上面的不等式中，我们用了等式：

$$\lim_{k\to\infty} m^*(T\cap I_k)=m^*(T\cap I).$$

这是因为若记 $\eta=\max\{b_i-a_i:i=1,2,\cdots,n\}$，则我们可用$2n$个其外测度为

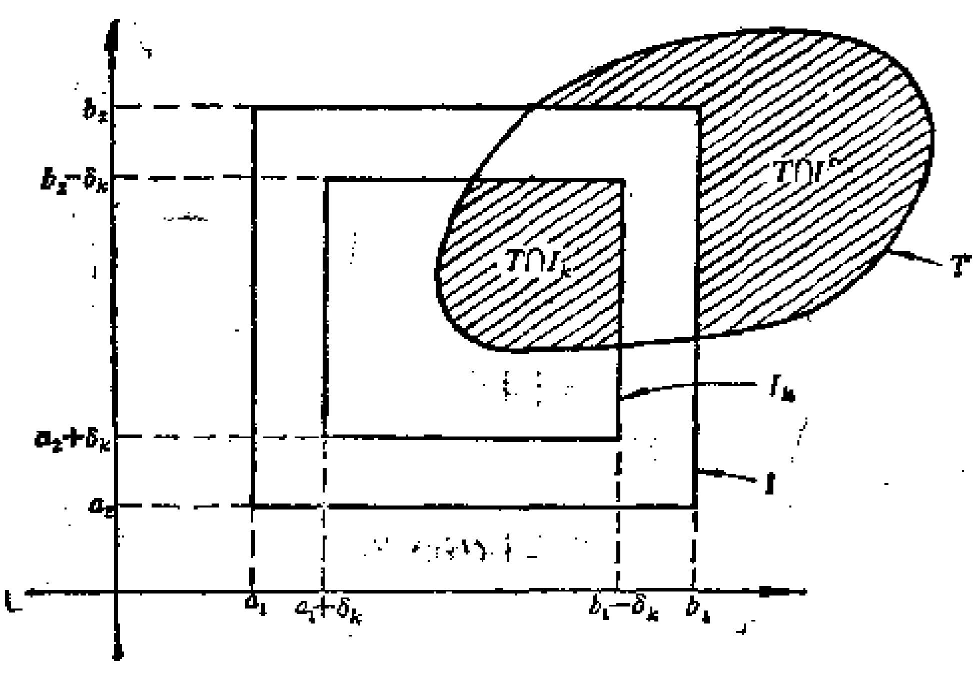


图 2.3

$$\delta_k(\eta+2\delta_k)^{n-1}$$

的闭矩体将点集$(T\cap I)\setminus(T\cap I_k)$覆盖起来。从而有

$$0\leqslant m^*(T\cap I)-m^*(T\cap I_k)$$
$$\leqslant 2n\cdot\delta_k(\eta+2\delta_k)^{n-1}\to 0,\quad k\to\infty.$$

从开矩体的可测性立即知道半开闭矩体、闭矩体也是可测集，且其测度就是它们的体积。从而开集、闭集等都是可测集。又因为可测集合类$\mathscr{M}$是σ-代数，所以一切Borel集皆为可测集。

定理2.10 若$E\in\mathscr{M}$，则对任给的$\varepsilon>0$，我们有

(i) 存在包含E的开集G，使得$m(G\setminus E)<\varepsilon$；

(ii) 存在含于E的闭集F，使得$m(E\setminus F)<\varepsilon$.

证明 (i) 首先考虑$m(E)<\infty$的情形。由定义知，存在E的L-覆盖$\{I_k\}$，使得$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<m(E)+\varepsilon$。令

$$G=\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k,$$

则G是包含E的开集且$m(G)<m(E)+\varepsilon$。因为$m(E)<\infty$，所以

移项后再合并得$m(G\setminus E)<\varepsilon$。

其次讨论$m(E)$是$+\infty$的情形。令

$$E_k=E\cap B(0,k),\qquad E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k,\quad k=1,2,\cdots.$$

因为$m(E_k)<\infty(k=1,2,\cdots)$，所以对任给的$\varepsilon>0$，存在包含$E_k$的开集$G_k$，使得$m(G_k\setminus E_k)<\varepsilon/2^k$。现在作点集

$$G=\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k,$$

则$G\supset E$且为开集。我们有

$$G\setminus E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k\setminus E_k),$$

从而得

$$m(G\setminus E)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(G_k\setminus E_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon.$$

(ii) 考虑E^c，由(i)可知，对任给$\varepsilon>0$，存在包含E^c的开集G，使得$m(G\setminus E^c)<\varepsilon$。现在令$F=G^c$，显然$F$是闭集且$F\subset E$，因为$E\setminus F=G\setminus E^c$，所以得

$$m(E\setminus F)<\varepsilon.$$

定理2.11 若$E\in\mathscr{M}$，则

(i) $E=H\setminus Z_1$，H是G_δ集，$m(Z_1)=0$；

(ii) $E=K\cup Z_2$，K是F_σ集，$m(Z_2)=0$。

证明 (i) 对于每个自然数k，由上述定理之(i)可知，存在包含E的开集G_k，使得$m(G_k\setminus E)<1/k$。现在作点集

$$H=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k,$$

则H为G_δ集且$E\subset H$。因为对一切k，都有

$$m(H\setminus E)\leqslant m(G_k\setminus E)<\frac{1}{k},$$

所以$m(H\setminus E)=0$。若令$H\setminus E=Z_1$，则得$E=H\setminus Z_1$。

(ii) 对于每个自然数k，由上述定理之(ii)可知，存在含于

E 的闭集 F_k，使得 $m(E\setminus F_k)<1/k$。现在作点集

$$K=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k,$$

则 K 是 F_σ 集且 $K\subset E$。因为对一切 k，都有

$$m(E\setminus K)\leqslant m(E\setminus F_k)<\frac{1}{k},$$

所以 $m(E\setminus K)=0$，若令 $E\setminus K=Z_2$，则得 $E=K\cup Z_2$。

G_δ 集，F_σ 集皆为Borel 集，从而上述定理说明了Lebesgue 可测集与Borel 集的简明关系。此处如果仅从测度的角度来看，那末上述定理指出：存在包含 E 的(G_δ)集 H，$m(H)=m(E)$；存在含于 E 的(F_σ)集 K，$m(K)=m(E)$。我们称如此的 H 与 K 为 E 的等测包与等测核。等测包对于一般点集 E 的外测度也是成立的。这从上述定理的证明中已经暗示出来了。

定理2.12 若 $E\subset \boldsymbol{R}^n$，则存在包含 E 的 G_δ 集 H，使得 $m(H)=m^*(E)$。(此时我们也称 H 为 E 的等测包。)

证明 对于每个自然数 k，存在包含 E 的开集 G_k，使得

$$m(G_k)\leqslant m^*(E)+\frac{1}{k}.$$

现在作点集

$$H=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k,$$

则 H 是 G_δ 集且 $H\supset E$。因为

$$m^*(E)\leqslant m(H)\leqslant m(G_k)\leqslant m^*(E)+\frac{1}{k},$$

所以 $m(H)=m^*(E)$。

注意，若 H 是 E 的等测包且 $m^*(E)<\infty$，则有

$$m^*(H)-m^*(E)=0.$$

但 $m^*(H\setminus E)$ 不一定等于零。不过可以证明 $H\setminus E$ 中的每一可测子集皆为零测集。

推论2.13 若有 $\boldsymbol{R}^n$ 中的集合列 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_k\subset\cdots$，则

$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) = m^*\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right). \tag{2.6}$$

证明 由于对一切k有

$$m^*(E_k) \leqslant m^*\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right),$$

故得

$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) \leqslant m^*\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right).$$

为证上式的反向不等式也成立，可对每个E_k作等测包H_k(G_δ集)，即

$$H_k \supset E_k, \quad 且 \quad m(H_k) = m^*(E_k).$$

现在作点集

$$S_k = \bigcap_{i=k}^{\infty} H_i, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

则$\{S_k\}$是递增可测集列。从而有

$$\lim_{k\to\infty} m(S_k) = m\left(\lim_{k\to\infty} S_k\right).$$

但$E_k \subset S_k \subset H_k$，故得

$$m^*(E_k) \leqslant m(S_k) \leqslant m(H_k) = m^*(E_k).$$

即$m(S_k) = m^*(E_k)$。随之也就有

$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) = \lim_{k\to\infty} m(S_k) = m\left(\lim_{k\to\infty} S_k\right).$$

根据$\lim\limits_{k\to\infty} S_k \supset \lim\limits_{k\to\infty} E_k$，可知

$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) \geqslant m^*\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right).$$

定理2.14 若$E \in \mathscr{M}$，$x_0 \in \boldsymbol{R}^n$，则$(E + \{x_0\}) \in \mathscr{M}$且

$$m(E + \{x_0\}) = m(E).$$

证明 由定理2.11可知

$$E = H \setminus Z,$$

其中$H = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$，每个$G_k$都是开集，$m(Z) = 0$。因为$G_k + \{x_0\}$是开集，所以

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}(G_k+\{x_0\})$$

是可测集，根据外测度的平移不变性，可知点集 $Z+\{x_0\}$ 是零测集，于是从等式

$$E+\{x_0\}=(H+\{x_0\})\setminus(Z+\{x_0\})$$

$$=\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}(G_k+\{x_0\})\right)\setminus(Z+\{x_0\})$$

立即可知 $E+\{x_0\}\in\mathscr{M}$。再用外测度的平移不变性得到

$$m(E+\{x_0\})=m(E).$$

注 一般地说，若在 Borel σ-代数上定义了测度 μ，且对紧集 K 有 $\mu(K)<\infty$，则称 μ 为 Borel 测度(显然，$\boldsymbol{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度是一种 Borel 测度)。

可以证明，若 μ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的平移不变的 Borel 测度，则存在常数 λ，使得对 $\boldsymbol{R}^n$ 中每一个 Borel 集合 B，均有

$$\mu(B)=\lambda\, m(B).$$

这就是说，除了一个常数倍因子外，Lebesgue 测度是 $\boldsymbol{R}^n$ 上平移不变的唯一的 Borel 测度。

§2.4 不可测集

现在来介绍不可测集，它的构造是建立在选择公理的基础上的。当然，实际上遇到不可测集的机会极少，因而通常是用它来构造各种反例(例如利用不可测集去作出 Lebesgue 可测集而非 Borel 集的例子等等)，以便使我们能加深对测度理论的理解。

引理2.15 设 E 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的可测集且 $m(E)>0$，$0<\lambda<1$，则存在矩体 I，使得

$$\lambda|I|<m(I\cap E). \tag{2.7}$$

证明 不妨设 $m(E)<\infty$。对于 $0<\varepsilon<(\lambda^{-1}-1)m(E)$，作 E 的 L-覆盖 $\{I_k\}$，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<m(E)+\varepsilon.$$

从而存在k_0，使得$\lambda|I_{k_0}|<m(I_{k_0}\cap E)$。事实上，若对一切$k$，有

$$\lambda|I_k|\geqslant m(I_k\cap E).$$

则可得

$$m(E)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(I_k\cap E)\leqslant\lambda\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|$$

$$\leqslant\lambda(m(E)+\varepsilon)<m(E).$$

这就导致$m(E)<m(E)$，产生矛盾。

引理2.16 设E是R^n中的可测集且$m(E)>0$。作(向量差)点集

$$E-E=\{x-y:x,y\in E\},$$

则存在$\delta>0$，使得$E-E\supset B(0,\delta)$。

证明 取λ满足$1-2^{-(n+1)}<\lambda<1$，由引理2.15可知，存在矩体I，使得

$$\lambda|I|<m(I\cap E).$$

现在记I的最短边长为δ，并作开矩体

$$J=\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n):|\xi_i|<\frac{\delta}{2}\ (i=1,2,\cdots,n)\}.$$

从而只需证明$J\subset E-E$即可。也就是只要证明对每个$x_0\in J$，点集$E\cap I$必与点集$(E\cap I)+\{x_0\}$相交(此时有y，$z\in E\cap I$使得$y-z=x_0$)。因为J是以原点为中心、边长为δ的开矩体，所以I的平移矩体$I+\{x_0\}$仍含有I的中心。从而知

$$m(I\cap(I+\{x_0\}))>2^{-n}|I|.$$

由此可得

$$m(I\cup(I+\{x_0\}))=|I|+m(I+\{x_0\})-m(I\cap(I+\{x_0\}))$$

$$<2|I|-2^{-n}|I|.$$

即 $$m(I\cup(I+\{x_0\}))<2\lambda|I|.$$
但由于 $E\cap I$ 与 $(E\cap I)+\{x_0\}$ 有着相同的测度并且都大于 $\lambda|I|$，同时又都含于 $I\cup(I+\{x_0\})$ 之中，故它们必定相交，否则其并集测度要大于 $2\lambda|I|$，从而引起矛盾。

现在来构造$\boldsymbol{R}^n$中不可测集的例子。

例(不可测集) 设 Q^n 为 $\boldsymbol{R}^n$中有理点集。对于 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点 x 与 y，若 $x-y\in Q^n$，则记为 $x\sim y$。根据这一等价关系"$\sim$"，将 $\boldsymbol{R}^n$中一切点分类，凡有等价关系者均属一类(例如 Q^n 本身即为其中一类)。现在根据选择公理①，在每一类中取出一元且只取一元构成点集，并记为W，则W为不可测集。事实上，若W为可测集，则第一种情形是 $m(W)>0$。从而根据上面的引理，可知点集$W-W$含有一球 $B(0,\delta)$，因此存在

$$x\in(W-W)\cap Q^n,\qquad x\neq 0.$$

这就是说存在W中点 y 与 z，$x=y-z$，$y\neq z$。这与集 W 的构成矛盾。于是只有第二种情形发生：$m(W)=0$。但此时若作可列个平移集

$$W+\{r^{(k)}\},\qquad \{r^{(1)},r^{(2)},\cdots,r^{(k)},\cdots\}=Q^n,$$

显然有

$$\boldsymbol{R}^n=\bigcup_{k=1}^{\infty}(W+\{r^{(k)}\}).$$

由于 $m(W)=0$，可知 $m(W+\{r^{(k)}\})=0$，随之得出 $\boldsymbol{R}^n$ 是零测集。这一矛盾说明第二种情形也不能发生。于是W不是Lebesgue可测集。

注意，实际上任一个 $m^*(E)>0$ 的点集E中均含有不可测集。

§2.5* 连续变换与可测集

对于 $\boldsymbol{R}^n$ 中的平移变换T，如果 $E\in\mathscr{M}$，那末我们已经知道

① 见本章末尾附注(一)。

$T(E)\in\mathscr{M}$。本节将进一步讨论其它变换的情形。

定义2.3 设有变换T：$\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$。若对任一开集$G$，

$$T^{-1}(G),\quad 即\quad \{x\in\boldsymbol{R}^n:T(x)\in G\}$$

是一个开集，则称T是从$\boldsymbol{R}^n$到$\boldsymbol{R}^n$的连续变换。

定理2.17 变换$T:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$是连续变换的充分且必要条件是：对任一点$x\in\boldsymbol{R}^n$以及$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$|y-x|<\delta$时，有

$$|T(y)-T(x)|<\varepsilon.$$

证明 必要性。对任一点$x\in\boldsymbol{R}^n$以及$\varepsilon>0$，则x属于开集

$$T^{-1}(B(T(x),\varepsilon)).$$

从而存在$\delta>0$，使得

$$B(x,\delta)\subset T^{-1}(B(T(x),\varepsilon)).$$

这说明当$|y-x|<\delta$时，有$y\in T^{-1}(B(T(x),\varepsilon))$，即

$$|T(y)-T(x)|<\varepsilon.$$

充分性。设G是$\boldsymbol{R}^n$中任一开集且$T^{-1}(G)$不是空集，则对任一点$x\in T^{-1}(G)$，有$T(x)\in G$，因此存在$\varepsilon>0$，使得$B(T(x),\varepsilon)\subset G$。根据充分性的假定，对此$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$|y-x|<\delta$时，有

$$|T(y)-T(x)|<\varepsilon\quad 即\quad T(y)\in B(T(x),\varepsilon)\subset G$$

这就是说$B(x,\delta)\subset T^{-1}(G)$。即$T^{-1}(G)$是开集。

例 若$T:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$是线性变换，则$T$是连续变换。

事实上，令$e_i(i=1,2,\cdots,n)$是$\boldsymbol{R}^n$中的一组基，则对$\boldsymbol{R}^n$中任意的$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，有

$$x=\xi_1e_1+\cdots+\xi_ne_n.$$

再令$T(e_i)=x_i(i=1,2,\cdots,n)$，又有

$$T(x)=\xi_1x_1+\cdots+\xi_nx_n.$$

记$M=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}$可得

$$|T(x)| \leqslant |\xi_1||x_1| + \cdots + |\xi_n||x_n|$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{1/2} = M \cdot |x|.$$

由此可知

$$|T(y) - T(x)| = |T(y-x)| \leqslant M|y-x|.$$

这说明T是连续变换。

定理2.18 设$T: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$是连续变换。若$K$是$\boldsymbol{R}^n$中的紧集，则$T(K)$是$\boldsymbol{R}^n$中的紧集。

证明 对于$T(K)$的任一开覆盖族$\{H_i\}$，令$G_i = T^{-1}(H_i)$，则$\{G_i\}$是K的开覆盖族。根据有限子覆盖定理可知，在$\{G_i\}$中存在$G_{i_1}, G_{i_2}, \cdots, G_{i_k}$，使得

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{k} G_{i_j}.$$

从而得

$$T(K) \subset \bigcup_{j=1}^{k} T(G_{i_j}) \subset \bigcup_{j=1}^{k} H_{i_j}.$$

这说明$T(K)$是$\boldsymbol{R}^n$中的紧集。

推论2.19 设$T: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$是连续变换。若$E$是$F_\sigma$集，则$T(E)$是$F_\sigma$集。

推论2.20 设$T: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$是连续变换。若对$\boldsymbol{R}^n$中的任一零测集$Z$，$T(Z)$必为零测集，则对$\boldsymbol{R}^n$中的任一可测集$E$，$T(E)$必为可测集。事实上，根据定理2.11，有$E = K \cup Z$，其中$K$是$F_\sigma$集，$Z$是零测集，因为

$$T(E) = T(K) \cup T(Z),$$

而$T(K)$是F_σ集，$T(Z)$为零测集，所以$T(E)$是可测集。

上面着重讨论了保持点集可测性的变换，对于线性变换我们还有下述结论。

定理2.21 若$T: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$是非奇异线性变换，$E \subset \boldsymbol{R}^n$，则

$$m^*(T(E)) = |\det T|^{①} \cdot m^*(E)。\tag{2.8}$$

证明* 记

$$I_0 = \{x = (\xi_1, \cdots, \xi_n): 0 \leqslant \xi_i < 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

$$I = \{x = (\xi_1, \cdots, \xi_n): 0 \leqslant \xi_i < 2^{-k},\ 1 \leqslant i \leqslant n\}。$$

显然，I_0 是 2^{nk} 个 I 的平移集 $I + \{x_j\}$ $(j = 1, \cdots, 2^{nk})$ 的并集，$T(I_0)$ 是 2^{nk} 个

$$T(I + \{x_j\}), \quad j = 1, \cdots, 2^{nk}$$

的并集，而且有(注意 T^{-1} 是连续变换)

$$m(T(I + \{x_j\})) = m(T(I)), \quad j = 1, \cdots, 2^{nk}.$$

现在假定(2.8)式对于 I_0 成立：

$$m(T(I_0)) = |\det T|,\tag{2.9}$$

则

$$|\det T| = 2^{nk} \cdot m(T(I))。$$

因为 $m(I) = 2^{-nk}$，所以得到

$$m(T(I)) = 2^{-nk} \cdot |\det T| = |\det T| \cdot m(I)。$$

这说明(2.8)式对每个 I 以及 I 的平移集都成立，从而可知(2.8)式对可数个互不相交的任意二进方体的并集是成立的，也就说明对任一开集 $G \subset \mathbf{R}^n$ (2.8)式均成立。于是应用等测包的推理方法立即可知，对一般点集(2.8)式成立。

现在证明(2.9)式成立。大家知道 T 至多可以表为如下几个初等变换的乘积：

(i) 坐标 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 之间的交换；

(ii) $\xi_1 \to \beta\xi_1$, $\xi_i \to \xi_i$ $(i = 2, \cdots, n)$；

(iii) $\xi_1 \to \xi_1 + \xi_2$, $\xi_i \to \xi_i$ $(i = 2, \cdots, n)$。

在(i)的情形，显然有 $|\det T| = 1$，$T(I_0) = I_0$。从而可知(2.9)式成立。

在(ii)的情形，T 矩阵可由恒等矩阵在第一行乘 β 而得到，

---

① $|\det T|$ 表示矩阵 T 的行列式的绝对值。

此时有

$$T(I_0) = \{x = (\xi_1, \cdots, \xi_n): 0 \leqslant \xi_i < 1 (i = 2, 3, \cdots, n)$$
$$0 \leqslant \xi_1 < \beta(\beta > 0), \beta < \xi_1 \leqslant 0(\beta < 0)\}.$$

从而可知 $m(T(I_0)) = |\beta|$，(2.9)式成立。

在 (iii) 的情形，此时 $\det T = 1$，而且有

$$T(I_0) = \{x = (\xi_1, \cdots, \xi_n): 0 \leqslant \xi_i < 1 (i \neq 1), 0 \leqslant \xi_1 - \xi_2 < 1\}.$$

记

$$A = \{x = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in T(I_0): \xi_1 < 1\}, e_1 = (1, 0, \cdots, 0),$$
$$B = T(I_0) \backslash A.$$

我们有

$$A = \{x = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in I_0: \xi_2 < \xi_1\},$$
$$B - e_1 = \{x = (\xi_1', \cdots, \xi_n') \in I_0: \xi_1' < \xi_2'\}.$$

因此得到

$$m(T(I_0)) = m(A) + m(B) = m(A) + m(B - e_1)$$
$$= m(I_0) = 1 = \det T.$$

这说明 (2.9) 式对 I_0 成立。

最后不妨设 $T = T_1 \cdot T_2 \cdot \cdots \cdot T_j$，这里的每个 T_j 均是 (i)—(iii) 情形之一，从而由归纳法可知

$$m^*(T(E)) = m(T_1(T_2(\cdots(T_j(E))\cdots)))$$
$$= |\det T_1| |\det T_2| \cdots |\det T_j| m^*(E)$$
$$= |\det T| m^*(E).$$

注 在 $|\det T| = 0$ 时，T 将 $\boldsymbol{R}^n$ 变为一个低维线性子空间，显然其映像集是零测集，我们有

$$m(T(E)) = |\det T| \cdot m(E) = 0, \quad E \subset \boldsymbol{R}^n.$$

推论 2.22 设 $T: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ 是非奇异线性变换。若 $E \in \mathscr{M}$，

则 $T(E)\in\mathscr{M}$ 且有

$$m(T(E))=|\det T|\cdot m(E).$$

附　注

（一）选择公理简介．在某些命题的证明中，我们经常需要在一些集合中选取元素．那末此种作法是否行得通呢？这要涉及到选择公理，我们在这里给予简单的说明．选择公理说："若 Γ 是由互不相交的一些非空集合所构成的集合族，则存在集合 X，它由上述每一个集合中恰取一元所构成．"这一选择公理指出，存在一个并没有明确指定其元素是什么的集合．这一公理与其他（Z.F.S）公理是相容且独立的．

这里来举一个通俗的例子，以便使我们对此公理获得一些感性认识．假定有无限双鞋，我们要从每一双鞋中选出一只左脚穿的鞋，并将其总体构成一个集合，那末这个集合是存在的．但若将鞋换成袜子，情况就不同了．因为袜子不分左右，所以就有多种选择，致使要承认这种成员不确定的集合存在就要引用选择公理．

选择公理还有其他各种形式的等价命题，它们在许多数学分支中均有着应用．例如建立实数的 Hamel 基，实变函数论中非 Lebesgue 可测集的存在，泛函分析中的 Hahn-Banach 扩张定理，拓扑学中乘积拓扑空间紧性的 Tychonoff 定理等等．

（二）在 §3.1 与 §3.2 中，我们指出 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 Borel 集是可测的，且任一可测集是一个 Borel 集与一个零测集的并集．那末，是否确有不是 Borel 集的可测集呢？回答是肯定的，现在我们以 $\boldsymbol{R}^1$ 为例来说明不是 Borel 集的零测集是存在的．为此，先介绍一个一般的引理．

引理　设 $f(x)$ 是定义在 $E\subset\boldsymbol{R}^n$ 上的实值函数，Γ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中一些子集构成的 σ-代数且 $E\in\Gamma$．若令

$$\mathscr{A} = \{A \subset \mathbf{R}^1 : f^{-1}(A) \in \Gamma\},$$

则 $\mathscr{A}$ 是 σ-代数.

证明 (i) 因为 $f^{-1}(\mathbf{R}^1) = E \in \Gamma$, 所以 $\mathbf{R}^1 \in \mathscr{A}$.

(ii) 若 $A \in \mathscr{A}$, 则由 $f^{-1}(A^c) = E \setminus f^{-1}(A)$, 可知 $f^{-1}(A^c) \in \Gamma$, 从而得 $A^c \in \mathscr{A}$.

(iii) 若$\{A_k\}$是$\mathscr{A}$中一集合列(即 $f^{-1}(A_k) \in \Gamma$), 则由

$$f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(A_k)$$

可知, $f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \in \Gamma$. 从而得 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$.

上述三条性质说明 $\mathscr{A}$ 是一个 σ-代数.

推论 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数. 若 A 是 Borel 集, 则 $f^{-1}(A)$ 也是 Borel 集.

证明 令 Γ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的 Borel σ-代数, G 是 $\mathbf{R}^1$ 中的开集. 根据 f 的连续性, $f^{-1}(G)$ 也是开集. 因此若令

$$\mathscr{A} = \{A: f^{-1}(A) \in \Gamma\},$$

则 $f^{-1}(G) \in \Gamma$, 从而 $G \in \mathscr{A}$, 上述引理指出$\mathscr{A}$是一个 σ-代数, 由此知一切 Borel 集皆属于 $\mathscr{A}$. 这说明若 A 是 Borel 集, 则 $f^{-1}(A) \in \Gamma$, 即 $f^{-1}(A)$ 是 Borel 集.

例(非 Borel 集的可测集) 考虑 $\mathbf{R}^1$ 中的$[0,1]$区间, $\Phi(x)$ 是 $[0,1]$ 上的 Cantor 函数. 作函数

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}(x + \Phi(x)), x \in [0,1].$$

显然, Ψ 是 $[0,1]$ 上的严格上升的连续函数, 且 $\Psi(0) = 0$, $\Psi(1) = 1$. 记其反函数为 Ψ^{-1}, 它是连续(且一一对应)的函数.

现在取 $[0, 1]$ 中的 Cantor 集 C, 并令在构造过程中每步移去的中央三分开区间为 $I_{n,k}(n = 1,2,\cdots;k = 1,2,\cdots,2^{n-1})$, 其

长度为 $|I_{n,k}|$，则 $\Psi(I_{n,k})$ 是长度为 $|I_{n,k}|/2$ 的开区间.（注意 $\Phi(x)$ 在 $I_{n,k}$ 上是常数)从而点集

$$\Psi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}\right)$$

的测度为1/2. 若令 $\Psi(C)=H$，可知 $m(H)=1/2$.

令W是H中的不可测集,并记 $\Psi^{-1}(W)=S$. 则因 $S\subset C$，所以S是可测集，但S不是 Borel 集，否则根据上述推论，W 也是 Borel 集从而为可测集了.

（三）关于不可测集. 在承认选择公理的基础上，我们引用三条性质：$m((0,1)\times(0,1)\times\cdots\times(0,1))=1$,可数可加性以及平移不变性构造了$\boldsymbol{R}^n$中不可测集的例子.为了避免出现不可测集,只好放弃可数可加这一性质(因为其他两条皆合常规).其一是改为次可加性质，例如外测度. 但这使得结果无多大用处；其二是改为有限可加性. 二十年代 Banach 用泛函延拓定理论述了 $\boldsymbol{R}^1$ 的情形，但这使得在其上所建立的积分不再具有著名的若干关于积分与极限交换次序的结果了.

1970 年 R. Solovay 在一篇文章 (Ann. of Math.) 中指出：$\boldsymbol{R}^1$ 中不可测集的存在蕴涵了选择公理.

习 题

1. 设 $A\subset\boldsymbol{R}^n$ 且 $m^*(A)=0$，试证明对任意的 $B\subset\boldsymbol{R}^n$，有
$$m^*(A\cup B)=m^*(B).$$

2. (i) 设 $A,B\subset\boldsymbol{R}^n$，且 $m^*(A),m^*(B)<\infty$，试证明：
$$|m^*(A)-m^*(B)|\leqslant m^*(A\triangle B)$$

(ii) 设 A,B 与C是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点集，且有
$$m^*(A\triangle B)=0,\quad m^*(B\triangle C)=0.$$
试证明：$m^*(A\triangle C)=0$.

3. 作 $\boldsymbol{R}^2$ 中点集：

$$E = \{x = (\xi, \eta): \xi \text{ 与 } \eta \text{ 之一是有理数}\},$$

试求 $m^*(E)$.

4. 设 $E \subset \boldsymbol{R}^1$ 且 $m^*(E) > 0, 0 < a < m^*(E)$，试证明存在 E 的子集 A，使得 $m^*(A) = a$.

5. 设 $A_1, A_2 \subset \boldsymbol{R}^n$，$A_1 \subset A_2$，$A_1$ 是可测集且有 $m(A_1) = m^*(A_2) < \infty$，试证明 A_2 是可测集.

6. 设 $A, B \subset \boldsymbol{R}^n, A \in \mathscr{M}$，且 $m^*(B) < \infty$，试证明

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B) - m^*(A \cap B).$$

7. 试问是否存在闭集 $F, F \subset [a,b]$ 且 $F \neq [a,b]$，而

$$m(F) = b - a?$$

8. 试在 $\boldsymbol{R}^1$ 中作一个由某些无理数构成的闭集 F，使得 $m(F) > 0$.

9. 试证明 $E \subset \boldsymbol{R}^n$ 是可测集的充分必要条件是：对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在开集 G_1 与 G_2：$G_1 \supset E$ 且 $G_2 \supset E^c$，使得

$$m(G_1 \cap G_2) < \varepsilon.$$

10. 设 $E \in \mathscr{M}$ 且 $m(E) > 0$，试证明存在 $x \in E$，使得对于任意的 $\delta > 0$，有 $m(E \cap B(x, \delta)) > 0$.

11. 设 $\{r_n\}$ 是 $\boldsymbol{R}^1$ 中的全体有理数，令

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2}\right),$$

试证明对 $\boldsymbol{R}^1$ 中任一闭集 F 有 $m(G \triangle F) > 0$.

12. 设 $E \subset \boldsymbol{R}^n$ 且 $m^*(E) < \infty$. 若

$$m^*(E) = \sup\{m(F): F \text{ 是 } E \text{ 中的有界闭集}\},$$

试证明 E 是可测集.

13. 设 $E \subset \boldsymbol{R}^1$ 且 $0 < a < m(E)$. 试证明存在无内点的有界闭集 $F: F \subset E$，使得 $m(F) = a$.

14. 设 $I = [0,1] \times [0,1]$，令

$$E = \left\{(x,y) \in I: |\sin x| < \frac{1}{2}, \cos(x+y) \text{ 是无理数}\right\},$$

试求 $m(E)$。（答：$\pi/6$）

15. 设$\{E_k\}$是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的可测集合列，试证明

(i) $m(\varliminf\limits_{k\to\infty}E_k)\leqslant\varliminf\limits_{k\to\infty}m(E_k)$；

(ii) 若存在 k_0，使得$m\left(\bigcup\limits_{k=k_0}^{\infty}E_k\right)<\infty$，则

$$m(\varlimsup_{k\to\infty}E_k)\geqslant\varlimsup_{k\to\infty}m(E_k).$$

16. 设$\{E_k\}$是$[0,1]$中的可测集列，$m(E_k)=1(k=1,2,\cdots)$，试证明

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=1.$$

17. 设 $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 是$[0,1]$中的可测集，且有

$$\sum_{i=1}^{k}m(E_i)>k-1,$$

试证明：$m\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k}E_i\right)>0$。

18. 设$\{B_k\}$是 $\boldsymbol{R}^n$ 中递减可测集列，$m^*(A)<\infty$。令$E_k=A\cap B_k$ $(k=1,2,\cdots)$，$E=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，试证明

$$\lim_{k\to\infty}m^*(E_k)=m^*(E).$$

19. 设$E\subset\boldsymbol{R}^1$且存在q：$0<q<1$，使得对于任意的区间(a,b)，总有开区间列$\{I_k\}$，使得

$$E\cap(a,b)\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k;\qquad\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<(b-a)q,$$

试证明 $m(E)=0$。

20. 设 $E\subset[a,b]$是可测集，$I_k\subset[a,b]$ $(k=1,2,\cdots)$是开区间列，满足

$$m(I_k\cap E)\geqslant\frac{2}{3}|I_k|,\quad(k=1,2,\cdots),$$

试证明

$$m\Big(\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\Big)\cap E\Big)\geqslant\frac{1}{3}m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\Big).$$

21*. 设$\{E_n\}$是$[0,1]$中互不相同的可测集合列,且存在$\varepsilon>0$,$m(E_n)\geqslant\varepsilon\quad(n=1,2,\cdots)$。试问是否存在子列$\{E_{n_i}\}$,使得$m\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_{n_i}\Big)>0$。又若$\{m(E_n)\}$中有收敛于1的子列,试问上述结论是否成立?

22. 设$\{E_n\}$是$[0,1]$中的可测集列,且满足

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,m(E_n)=1.$$

试证明对$0<a<1$,必存在$\{E_{n_k}\}$,使得

$$m\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_k}\Big)>a.$$

23. 设$E\subset\boldsymbol{R}^n$,$H\supset E$且H是可测集。若$H\setminus E$中任一可测子集皆为零测集,试问H是E的等测包吗?

24. 设$E\subset\boldsymbol{R}^n$,试证明存在G_δ型集H且$H\supset E$,使得对于任意一可测集$A\subset\boldsymbol{R}^n$,有$m^*(E\cap A)=m(H\cap A)$。

25. 设$A,B\subset\boldsymbol{R}^n$,$A\cup B\in\mathscr{M}$且$m(A\cup B)<\infty$。若

$$m(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B),$$

试证明A,B皆为可测集。

26. 设有$f:[a,b]\to\boldsymbol{R}^1$。若对于$[a,b]$中任一可测集$E$,$f(E)$必为$\boldsymbol{R}^1$中的可测集,试证明:对于$[a,b]$中任一零测集$Z$,必有$m(f(Z))=0$。

27. 设$T:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$是一一映射,且保持点集的外测度不变,试证明对于$E\in\mathscr{M}$,有$T(E)\in\mathscr{M}$。

28. 试证明在$[0.1]$中不存在具有下述性质的可测集S:即

对于任意的$(a,b)\subset[0,1]$，有

$$m(S\cap(a,b))=\frac{b-a}{2}.$$

P142

*29. 设E是$\mathbf{R}^1$中的可测集，$a\in\mathbf{R}^1$且$\delta>0$。若对满足$|x|<\delta$的x，$a+x$与$a-x$之中必有一点属于E，试证明

$$m(E)\geqslant\delta.$$

30*. 设定义在$\mathbf{R}^1$上的函数$f(x)$满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad x,y\in\mathbf{R}^1,$$

而且$f(x)$在一个正测集$E\subset\mathbf{R}^1$上是有界的，试证明$f(x)$是线性函数。

*31. 设$E\subset[0,1]$是可测集且有

$$m(E)\geqslant\varepsilon>0,\quad x_i\in[0,1],\quad i=1,2,\cdots,n,$$

其中$n>2/\varepsilon$，试证明E中存在两个点其距离等于$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$中某两个点之间的距离。 134

*32. 设$E\subset\mathbf{R}^1$且$m(E)>0$，试证明存在$x_1,x_2\in E$，使得$|x_1-x_2|$是有理数。

33. 设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}^1$上的连续可微函数，并且$f'(x)>0$，试证明当$E\subset\mathbf{R}^1$是可测集时，$f^{-1}(E)$是可测集。 143

34. 试作$[0,1]$中可测集E，使得对$[0,1]$任一子区间I，有

$$m(E\cap I)>0,\quad m(E\cap I^c)>0.$$

35. 设在$[0,1]$中作点集：

$E=\{x$:在x的十进位制小数表示中只出现九个数码$\}$，

试问E的测度与基数是多少？

36*. 设$a>2$，作$\mathbf{R}^1$中点集：

$$E=\{x:\text{存在无限个分数}p/q,\ p\text{与}q\text{是互素的自然数，使得}|x-p/q|<1/q^a\},$$

试证明$m(E)=0$。

*37. 设$E\subset\mathbf{R}^1$且$m(E)>0$，试证明点集

$$E+E=\{x+y:x\in E,y\in E\}$$ P142

必包含一个区间。

38. 试给出 $\boldsymbol{R}^1$ 中互不相交的点集列 $\{E_k\}$，使得

$$m^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} E_k\right) < \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k).$$

39. 设 W 是 $[0,1]$ 中的不可测集，试证明存在 ε：$0<\varepsilon<1$，使得对于 $[0,1]$ 中的任一满足 $m(E)\geqslant\varepsilon$ 的可测集 E，$W\cap E$ 是不可测集。

40. 设 W 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的不可测集，$E\subset\boldsymbol{R}^n$ 是可测集。试证明 $E\triangle W$ 是不可测集。

41*. 设 E 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的不可测集，试证明存在 $\varepsilon>0$，使得对满足

$$A\supset E, \quad B\supset E^c$$

的任意可测集 A 与 B，均有 $m(A\cap B)\geqslant\varepsilon$。

42. 设 A,B 是 $\boldsymbol{R}^1$ 中两个正测集，试证明 $A+B$ 必包含一个内点。

43*. 设 D 是 $\boldsymbol{R}^1$ 中的稠密集，μ 是 $\boldsymbol{R}^1$ 上的 Borel 测度，如果对于任意的 $x_0\in D$ 以及 $a,b\in\boldsymbol{R}^1$，有

$$\mu([a,b)+\{x_0\})=\mu([a,b)),$$

试证明对 $\boldsymbol{R}^1$ 中任意的 Borel 集 E，有

$$\mu(E)=\lambda\cdot m(E), \quad \lambda=\mu([0,1)).$$

44*. 试作 $\boldsymbol{R}^2$ 中正测集，使其任一正测子集 E，皆不能表成 $E=A\times B$，其中 A,B 是 $\boldsymbol{R}^1$ 中正测集。

第三章　可测函数

Riemann 积分的定义，粗略地说，是对"差不多"连续的函数而作的(确切地说，一个定义在 $[a,b]$ 上的有界函数是黎曼可积的充分且必要的条件是其不连续点集的 Lebesgue 测度为零，见下章)．实变函数中所要建立的 Lebesgue 积分论，是要把积分对象扩充到更大的一类函数——可测函数类上去．

与连续函数不同，可测函数在极限运算下是封闭的，这就使所建立的积分在理论上使用起来更加便利．在本章中我们还可看到可测函数与连续函数，可测函数列的点态收敛与一致收敛有着密切的联系，这些有关可测函数结构的内容将在积分理论中发挥重要作用．

§3.1　可测函数的定义及其性质

为了论述的简便和统一，今后我们在谈到可测函数时允许函数取值 $\pm\infty$，(称 $\boldsymbol{R}^1\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$ 为广义实数集)，因此先将有关 $\pm\infty$ 的运算规则叙述如下：

(i) $-\infty<+\infty$；若 $x\in\boldsymbol{R}^1$，则 $-\infty<x<+\infty$；

(ii) 若 $x\in\boldsymbol{R}^1$，则

$$x+(\pm\infty)=(\pm\infty)+x=(\pm\infty+(\pm\infty))=\pm\infty,$$

$$x-(\mp\infty)=(\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty,$$

$$\pm(\pm\infty)=+\infty,\qquad \pm(\mp\infty)=-\infty,$$

$$|\pm\infty|=+\infty;$$

(iii) $x\in\boldsymbol{R}^1$ 且 $x\neq 0$ 的符号函数为

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases}+1, & x>0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

$$x\cdot(\pm\infty)=\pm(\operatorname{sign} x)\infty,$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty)=+\infty,\qquad (\pm\infty)(\mp\infty)=-\infty,$$

但是 $(\pm\infty)-(\pm\infty)$，$(\pm\infty)+(\mp\infty)$ 等是无意义的；

(iv) 特别约定 $0\cdot(\pm\infty)=0$。

注意，$+\infty$ 有时简记为 ∞。

定义 3.1 设 $f(x)$ 是定义在可测集 $E\subset \boldsymbol{R}^n$ 上的广义实值函数。若对于任意的实数 t，点集

$$\{x\in E: f(x)>t\}\quad (\text{或简写为 } \{x: f(x)>t\})$$

是可测集，则称 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，或称 $f(x)$ 在 E 上可测。

这一定义虽然指的是任意 $t\in \boldsymbol{R}^1$，但下一定理指出，我们只需对一个稠密集中的 r，集合 $\{x: f(x)>r\}$ 是可测集就可以了。

定理 3.1 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的函数，D 是 $\boldsymbol{R}^1$ 中的一个稠密集。若对任意的 $r\in D$，点集 $\{x: f(x)>r\}$ 都是可测集，则对任意的 $t\in \boldsymbol{R}^1$，点集 $\{x: f(x)>t\}$ 也是可测集。

证明 对任一实数 t，选取 D 中的点列 $\{r_k\}$，使得

$$r_k\geqslant t\quad (k=1,2,\cdots);\quad \lim_{k\to\infty} r_k=t.$$

我们有

$$\{x: f(x)>t\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x: f(x)>r_k\}. \tag{3.1}$$

因为每个点集 $\{x: f(x)>r_k\}$ 都是可测集，所以 $\{x: f(x)>t\}$ 是可测集。

例 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的单调函数，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数。

事实上，对于任意的 $t\in \boldsymbol{R}^1$，点集 $\{x\in[a,b]: f(x)>t\}$ 定属于下述三种情况之一：区间，单点集或空集。从而可知

$$\{x\in[a,b]: f(x)>t\}$$

是可测集。这说明 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数。

定理 3.2 若 $f(x)$ 是 E 上可测函数，则下列等式中左端的点集皆可测：

(i) $\{x: f(x)\leqslant t\}=E\setminus\{x: f(x)>t\}\ (t\in \boldsymbol{R}^1)$；

(ii) $\{x: f(x) \geqslant t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{x: f(x) > t - \frac{1}{k}\right\} \quad (t \in \boldsymbol{R}^1)$;

(iii) $\{x: f(x) < t\} = E \setminus \{x: f(x) \geqslant t\} \quad (t \in \boldsymbol{R}^1)$;

(iv) $\{x: f(x) = t\} = \{x: f(x) \geqslant t\} \cap \{x: f(x) \leqslant t\} \ (t \in \boldsymbol{R}^1)$;

(v) $\{x: f(x) < \infty\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x: f(x) < k\}$;

(vi) $\{x: f(x) = +\infty\} = E \setminus \{x: f(x) < +\infty\}$;

(vii) $\{x: f(x) > -\infty\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x: f(x) > -k\}$;

(viii) $\{x: f(x) = -\infty\} = E \setminus \{x: f(x) > -\infty\}$.

证明 上述等式的成立是明显的。至于左端点集的可测性可阐明如下:

从可测性定义易推 (i),(ii) 与(vii)。从 (ii) 可推 (iii)。从 (i) 与 (ii) 可推 (iv)。从 (iii) 可推 (v)。从 (v) 可推 (vi)。从 (vii) 可推 (viii)。

注 由于对任意的 $t \in \boldsymbol{R}^1$, 有

$$\{x: f(x) > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x: f(x) > t + \frac{1}{k}\right\}$$

$$= E \setminus \{x: f(x) \leqslant t\} = E \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{x: f(x) < t + \frac{1}{k}\right\},$$

故用定理中 (i),(ii) 与 (iii) 的左端点集的可测性均可当作 $f(x)$ 可测性的定义。

定理 3.3 (i) 若 $f(x)$ 是定义在 $E_1 \cup E_2 \subset \boldsymbol{R}^n$ 上的广义实值函数,若 $f(x)$ 在 E_1 上可测,在 E_2 上也可测,则 $f(x)$ 在 $E_1 \cup E_2$ 上可测。

(ii) 若 $f(x)$ 在 E 上可测, A是 E 中可测集, 则 $f(x)$ 看作是定义在 A 上的函数在 A 上也是可测的。

证明 (i) 只需注意等式

$$\{x \in E_1 \cup E_2: f(x) > t\}$$

$$=\{x\in E_1:f(x)>t\}\cup\{x\in E_2:f(x)>t\},\qquad t\in\mathbf{R}^1.$$

(ii) 只需注意等式

$$\{x\in A:f(x)>t\}=A\cap\{x\in E:f(x)>t\};\qquad t\in\mathbf{R}^1.$$

例 若 $E\in\mathscr{M}$，则 $\chi_E(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数。

定理3.4(可测函数的运算性质(一)) 若 $f(x),g(x)$ 是 E 上的实值可测函数，则下列函数

(i) $cf(x)(c\in\mathbf{R}^1)$；

(ii) $f(x)+g(x)$；

(iii) $f(x)\cdot g(x)$

都是 E 上的可测函数。

证明 (i) 对于$t\in\mathbf{R}^1$，若 $c>0$，则由

$$\{x:cf(x)>t\}=\{x:f(x)>c^{-1}t\}$$

可知，$cf(x)$在 E 上可测；若 $c<0$，则由

$$\{x:cf(x)>t\}=\{x:f(x)<c^{-1}t\}$$

可知，$cf(x)$在 E 上可测；若 $c=0$，则 $cf(x)=0$的可测性是明显的。

(ii) 对于 $t\in\mathbf{R}^1$，因为 $f(x)+g(x)>t$ 就是 $f(x)>t-g(x)$. 从而有

$$\{x:f(x)+g(x)>t\}$$
$$=\bigcup_{i=1}^{\infty}(\{x:f(x)>r_i\}\cap\{x:g(x)>t-r_i\}),$$

其中$\{r_i\}$是有理数列。从而可知 $f(x)+g(x)$是 E上的可测函数。

(iii) 首先，$f^2(x)$在 E 上可测。这是因为对于 $t\in\mathbf{R}^1$，我们有

$$\{x:f^2(x)>t\}=\begin{cases}E, & t<0,\\ \{x:f(x)>\sqrt{t}\}\cup\{x:f(x)<-\sqrt{t}\}, & t\geqslant 0.\end{cases}$$

其次，因为

$$f(x)g(x)=((f(x)+g(x))^2-(f(x)-g(x))^2)/4,$$

而 $f(x)+g(x)$ 以及 $f(x)+(-g(x))$ 都是 E 上可测函数，所以 $f(x)\cdot g(x)$ 在 E 上可测。

推论3.5 上述定理所说的运算性质对于取广义实值的可测函数也是成立的。

事实上，只需注意下列点集

$$\{x:f(x)=+\infty\},\qquad \{x:f(x)=-\infty\},$$
$$\{x:g(x)=+\infty\},\qquad \{x:g(x)=-\infty\}.$$

都是可测集即可。

定理3.6（可测函数的运算性质（二）） 若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列，则下列函数

(i) $\sup\limits_{k\geq 1}\{f_k(x)\}$； (ii) $\inf\limits_{k\geq 1}\{f_k(x)\}$；

(iii) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} f_k(x)$； (iv) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} f_k(x)$

都是 E 上的可测函数。

证明 (i) 因为我们有

$$\{x:\sup_{k\geq 1}\{f_k(x)\}>t\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x:f_k(x)>t\},\qquad t\in \boldsymbol{R}^1,$$

所以 $\sup\limits_{k\geq 1}\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数。

(ii) 由于

$$\inf_{k\geq 1}\{f_k(x)\}=-\sup_{k\geq 1}\{-f_k(x)\},$$

故可知 $\inf\limits_{k\geq 1}\{f_k(x)\}$ 在 E 上可测。

(iii) 只需注意到

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} f_k(x)=\inf_{i\geq 1}\left(\sup_{k\geq i}[f_k(x)]\right)$$

即可。

(iv) 根据等式

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} f_k(x)=-\overline{\lim_{k\to\infty}}(-f_k(x))$$

可知，$\varlimsup_{k\to\infty} f_k(x)$是$E$上的可测函数。

推论3.7 若$\{f_k(x)\}$是E上的可测函数列且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x),$$

则$f(x)$是E上的可测函数。

例 设$f(x)$是定义在E上的广义实值函数，令

$$f^+\equiv f^+(x)=\max\{f(x),0\},$$
$$f^-\equiv f^-(x)=\max\{-f(x),0\},$$

并分别称它们为$f(x)$的正部与负部。我们有

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x). \qquad (3.2)$$

若$f(x)$在E上是可测的，则$f^+(x),f^-(x)$都是E上的可测函数。反之亦然。此外，因为我们有

$$|f(x)|=f^+(x)+f^-(x), \qquad (3.3)$$

所以当$f(x)$在E上可测时，$|f(x)|$也在E上可测。但反之不然。

关于可测函数的复合运算性质将在§3.3中讨论。

定义3.2 设有一个与集合$E\subset \boldsymbol{R}^n$中的点$x$有关的命题$P(x)$。若除了$E$中的一个零测集以外，$P(x)$皆为真，则称$P(x)$在$E$上几乎处处是真的。并简记为$P(x)$ a.e.① (于E)。

例 若$f(x),g(x)$是定义在$E\subset \boldsymbol{R}^n$上的广义实值函数，且有

$$m(\{x\in E: f(x)\neq g(x)\})=0,$$

则称$f(x)$与$g(x)$在E上几乎处处相等，也称为$f(x)$与$g(x)$是对等的，记为$f(x)=g(x)$ a.e.。

例 设$f(x)$是定义在$E\subset \boldsymbol{R}^n$上的广义实值函数。若

$$m(\{x\in E: |f(x)|=+\infty\})=0,$$

① a.e.是英文almost everywhere的缩写。有的书上写成p.p.，是法文presque partout的缩写。

则称 $f(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的，并简记为

$$|f(x)|<\infty \quad \text{a.e.}.$$

注意，$|f(x)|<\infty$ a.e. 与 $|f(x)|<M$ a.e. 是不同的。后者蕴含前者，但反之不然。

定理3.8 设 $f(x), g(x)$ 是定义在 $E\subset \boldsymbol{R}^n$ 上的广义实值函数，$f(x)$ 是 E 上可测函数。若 $f(x)=g(x)$ a.e.，则 $g(x)$ 在 E 上可测。

证明 令 $A=\{x:f(x)\neq g(x)\}$，则 $m(A)=0$ 且 $E\setminus A$ 是可测集。对于 $t\in \boldsymbol{R}^1$，我们有

$$\begin{aligned}&\{x\in E:g(x)>t\}\\ &\quad=\{x\in E\setminus A:g(x)>t\}\cup\{x\in A:g(x)>t\}\\ &\quad=\{x\in E\setminus A:f(x)>t\}\cup\{x\in A:g(x)>t\}.\end{aligned}$$

根据 $f(x)$ 在 E 上的可测性可知，上式右端第一个点集是可测的，而第二个点集是零测集。从而可知左端点集是可测的。

由此可知，对一个可测函数来说，当改变它在零测集上的值时不会改变函数的可测性。

定义3.3（简单函数） 设 $f(x)$ 是定义在 $E\subset \boldsymbol{R}^n$ 上的实值函数。若

$$\{y:y=f(x),\ x\in E\}$$

是有限集，则称 $f(x)$ 为 E 上的简单函数。

设 $f(x)$ 是 E 上的简单函数，且有

$$E=\bigcup_{i=1}^{p} E_i, \quad E_i\cap E_j=\varnothing,$$

$$i=1,2,\cdots,p.$$

$$f(x)=c_i, \quad x\in E_i,$$

此时可将 f 记为

$$f(x)^{①}=\sum_{i=1}^{p}c_i\chi_{E_i}(x),\qquad x\in E. \tag{3.4}$$

从而简单函数是有限个特征函数的线性组合。特别地，当每个E_i是矩体(这里允许取无限大的矩体)时，称$f(x)$是阶梯函数。

显然，若$f(x),g(x)$是E上的简单函数，则$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$也是E上的简单函数。

若$f(x)$是E上的简单函数，且(3.4)式中的每个E_i都是可测集，则称$f(x)$是E上的可测简单函数。由此可见，可测简单函数是可测函数类中结构较简明的一种函数，如果我们能够揭示出它与一般可测函数之间的某种联系，那将是极为有益的。事实上，下述逼近定理正是我们今后要得到的许多重要结果的基础。

定理3.9(简单函数逼近定理) (i) 若$f(x)$是E上的非负可测函数，则存在非负可测的简单函数渐升列：

$$\varphi_k(x)\leqslant\varphi_{k+1}(x),\qquad k=1,2,\cdots,$$

使得

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)^{②},\qquad x\in E; \tag{3.5}$$

(ii) 若$f(x)$是E上的可测函数，则存在可测简单函数列$\{\varphi_k(x)\}$，使得$|\varphi_k(x)|\leqslant|f(x)|$，且有

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\qquad x\in E.$$

---

① 这里的$f(x)$也可看成是$\mathbf{R}^n$上的函数$\sum_{i=1}^{p}c_i\chi_{E_i}(x)$在$E$上的限制。

② 这就是说存在非负实数列$\{c_k\}$以及可测集列$\{A_k\}$，使得$f(x)$有表达式：

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\chi_{A_k}(x),\qquad x\in E.$$

这只需令$\varphi_0(x)=0$，并将

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)],\qquad x\in E$$

表为二重级数即可。

若$f(x)$还是有界的，则上述收敛是一致的。

证明 (i) 对任意的自然数k，我们将$[0,k]$划分为$k\cdot 2^k$等分，并记

$$E_{k,j}=\left\{x:\frac{j-1}{2^k}\leqslant f(x)<\frac{j}{2^k}\right\},\qquad E_k=\{x:f(x)\geqslant k\},$$

$$j=1,2,\cdots,k2^k,\qquad k=1,2,\cdots.$$

作函数列

$$\varphi_k(x)=\begin{cases}\dfrac{j-1}{2^k}, & x\in E_{k,j},\\ k, & x\in E_k,\end{cases}$$

$$j=1,2,\cdots,k2^k,\qquad k=1,2,\cdots,$$

并记

$$\varphi_k(x)=k\chi_{E_k}(x)+\sum_{j=1}^{k2^k}\frac{j-1}{2^k}\chi_{E_{k,j}}(x),\qquad x\in E.$$

显然，每个$\varphi_k(x)$都是非负可测简单函数且有

$$\varphi_k(x)\leqslant\varphi_{k+1}(x)\leqslant f(x),\qquad|\varphi_k(x)|\leqslant k,$$

$$x\in E,\qquad k=1,2,\cdots.$$

现在，对任意的$x\in E$，若$f(x)\leqslant M$，则当$k>M$时有

$$0\leqslant f(x)-\varphi_k(x)\leqslant 2^{-k}.$$

若$f(x)=+\infty$，则$\varphi_k(x)=k\quad(k=1,2,\cdots)$。从而得

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\qquad x\in E.$$

(ii) 记$f(x)=f^+(x)-f^-(x)$。由(i)知存在可测简单函数列$\{\varphi_k^{(1)}(x)\}$及$\{\varphi_k^{(2)}(x)\}$，满足

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k^{(1)}(x)=f^+(x),\qquad\lim_{k\to\infty}\varphi_k^{(2)}(x)=f^-(x),\qquad x\in E.$$

显然，$\varphi_k^{(1)}(x)-\varphi_k^{(2)}(x)$是可测简单函数，且有

$$\lim_{k\to\infty}[\varphi_k^{(1)}(x)-\varphi_k^{(2)}(x)]=f^+(x)-f^-(x)$$

$$=f(x),\qquad x\in E.$$

若在E上$|f(x)|\leqslant M$，则当$k>M$时有

$$\left.\begin{array}{l}\sup|f^+(x)-\varphi_k^{(1)}(x)|\leqslant\dfrac{1}{2^k},\\ \sup|f^-(x)-\varphi_k^{(2)}(x)|\leqslant\dfrac{1}{2^k},\end{array}\right\}\quad x\in E.$$

从而知$\varphi_k^{(1)}(x)-\varphi_k^{(2)}(x)$是一致收敛于$f(x)$的。

定义3.4 对于定义在$E\subset\mathbf{R}^n$上的函数$f(x)$，我们称点集

$$\{x:f(x)\neq 0\}$$

的闭包为$f(x)$的支集，记为$\mathrm{supp}(f)$。若$f(x)$的支集是有界(即支集是紧集)的，则称$f(x)$是具有紧支集的函数。

推论3.10 定理3.9中所说的可测简单函数列中的每一个均可取成具有紧支集的函数。

证明 对每个k，令

$$g_k(x)=\varphi_k(x)\chi_{B(0,k)}(x),\qquad x\in E,$$

则$g_k(x)$仍是可测简单函数且具有紧支集。

现在，若$x\in E$，则存在k_0，使得当$k\geqslant k_0$时有$x\in B(0,k)$。此时可得

$$\lim_{k\to\infty}g_k(x)=\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\qquad x\in E.$$

§3.2 可测函数列的收敛

给定一个函数列，在考虑它的收敛问题时，我们关心两点：一是在什么意义下收敛；二是各种收敛之间有什么联系，对于可测函数列来说，本节所介绍的Егоров定理指出了几乎处处收敛与一致收敛的某种关系。由于函数列一致收敛性的重要意义，可以预料这一定理将有着广泛的应用。此外，下文将要引进的依测度收敛的概念是可测函数列最典型的一种收敛，它在概率论中有着具体的含意。

(一) 几乎处处收敛与一致收敛

定义3.5 设$f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$是定义在点集$E \subset R^n$上的广义实值函数。若存在$E$中的点集$Z$，有$m(Z)=0$及

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in E \setminus Z,$$

则称$\{f_k(x)\}$在E上几乎处处收敛于$f(x)$，并简记为

$$f_k \to f \quad \text{a. e.}.$$

显然，若$\{f_k(x)\}$是E上的可测函数列，则$f(x)$也是E上的可测函数。

引理3.11 设$f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$是$E$上几乎处处有限的可测函数且$m(E)<\infty$。若$f_k \to f$ a. e.，则对任给$\varepsilon>0$，令

$$E_k(\varepsilon) = \{x \in E: |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\},$$

我们有

$$\lim_{j \to \infty} m\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)\right) = 0. \tag{3.6}$$

证明 显然，上限集$\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)$中的点一定不是收敛点，从而依题设可知

$$m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)\right) = 0.$$

根据递减集合列测度定理，可知(3.6)成立。

定理3.12(Егоров 定理) 设$f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$是$E$上几乎处处有限的可测函数且$m(E)<\infty$。若$f_k(x) \to f(x)$ a.e.，则对任给的$\delta>0$，存在E中子集E_δ，$m(E_\delta) \leqslant \delta$，使得$\{f_k(x)\}$在$E \setminus E_\delta$上一致收敛于$f(x)$。

证明 由上述引理3.11可知，对任给的$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{j \to \infty} m\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)\right) = 0.$$

现在取正数列$1/i (i=1,2,\cdots)$，则对任给的$\delta>0$以及每一个i，存在j_i，使得

$$m\left(\bigcup_{k=j_i}^{\infty} E_k\left(\frac{1}{i}\right)\right)<\frac{\delta}{2^i}.$$

令

$$E_\delta=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=j_i}^{\infty} E_k\left(\frac{1}{i}\right),$$

我们有

$$m(E_\delta)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty} m\left(\bigcup_{k=j_i}^{\infty} E_k\left(\frac{1}{i}\right)\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^i}=\delta.$$

最后，我们来证明在点集

$$E\setminus E_\delta=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcap_{k=j_i}^{\infty}\left\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|<\frac{1}{i}\right\}$$

上，$\{f_k(x)\}$是一致收敛于$f(x)$的。

事实上，对于任给$\varepsilon>0$，存在i，使得$1/i<\varepsilon$。从而对一切$x\in E\setminus E_\delta$，当$k\geqslant j_i$时，有

$$|f_k(x)-f(x)|<\frac{1}{i}<\varepsilon.$$

这说明$f_k(x)$在$E\setminus E_\delta$上一致收敛于$f(x)$。

注意，Егоров定理中的条件$m(E)<\infty$不能去掉。例如考虑可测函数列

$$f_n(x)=\chi_{(0,n)}(x),\quad n=1,2,\cdots,\quad x\in(0,\infty).$$

它在$(0,\infty)$上处处收敛于$f(x)\equiv1$，但在$(0,\infty)$中的任一个有限测度集外均不一致收敛于$f(x)\equiv1$。

（二）几乎处处收敛与依测度收敛

对于可测函数列来说，仅用处处收敛或几乎处处收敛的概念来描述它是不充分且不典型的。为此，先看一例。

例 对给定的自然数n，我们总可找到唯一的自然数k与i，使得

$$n=2^k+i,\quad 0\leqslant i<2^k,\quad k=1,2,\cdots.$$

现在在[0,1]上作函数列：

$$f_n(x)=\chi_{\left[\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}\right]}(x),\quad n=1,2,\cdots,\quad x\in[0,1].$$

对于这一函数列来说，它在[0,1]中的任一点上都是不收敛的。事实上，若$x_0\in[0,1]$，则必存在k_0与i_0，使得

$$x_0\in\left[\frac{i_0}{2^{k_0}},\frac{i_0+1}{2^{k_0}}\right].$$

这说明在$f_1(x_0),f_2(x_0),\cdots,f_n(x_0),\cdots$中有无穷多项为1和0，即它是不收敛的。因此，仅考虑点收敛，将得不到任何信息。

然而，由于每个$f_n(x)$都是可测函数，故我们可提出下述思想：虽然对每个$x\in[0,1]$，$\{f_k(x)\}$中有无穷多个1出现，但是在所谓"频率"的意义下，0却大量地出现。换句话说，如果我们取$0<\varepsilon\leqslant1$，那末点集

$$\{x\in[0,1]:|f_n(x)-0|\geqslant\varepsilon\}$$

的测度是非常小的。实际上，我们有(注意$n=2^k+i$)

$$m(\{x\in[0,1]:|f_n(x)|\geqslant\varepsilon\})=\frac{1}{2^k}.$$

这样，对于任给$\varepsilon>0$，可取到n_0，也就是取到k_0，使得当$k\geqslant k_0$时，有

$$m(\{x\in[0,1]:|f_n(x)|<\varepsilon\})>1-\delta,$$

其中$2^{-k}<\delta$。这个不等式反映出这样的事实：对充分大的n，出现0的"频率"接近1，我们称此为$\{f_n(x)\}$依测度收敛于零。

定义3.6 设$f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$是$E$上几乎处处有限的可测函数，若对任给的$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{k\to\infty}m(\{x:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0,\tag{3.7}$$

则称$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$。

注意，$m(\{x:|f_k(x)|=+\infty\})=0\ (k=1,2,\cdots)$。

下述定理指出，在函数对等的意义下，依测度收敛的极限函数是唯一的。

定理3.13 若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上同时依测度收敛于 $f(x)$ 与 $g(x)$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是对等的。

证明 因为

$$|f(x)-g(x)|\leqslant|f(x)-f_k(x)|+|g(x)-f_k(x)| \quad \text{a.e.},$$

所以对任给 $\varepsilon>0$，有(除零测集外)

$$\{x:|f(x)-g(x)|>\varepsilon\}$$
$$\subset\left\{x:|f(x)-f_k(x)|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$
$$\cup\left\{x:|g(x)-f_k(x)|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

但当 $k\to\infty$ 时，上式右端点集的测度趋于零。从而得

$$m(\{x:|f(x)-g(x)|>\varepsilon\})=0.$$

由 ε 的任意性，可知 $f(x)=g(x)$ a.e.。

从几乎处处收敛与依测度收敛的定义中可以看出，前者强调的是在点上函数值的收敛(尽管除一个零测集外)，后者并非指在那个点上的收敛。其要点在于点集

$$\{x:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}$$

的测度应随 k 趋于无穷而趋于零，而不论此点集的位置状态如何。这是两者的区别。下面我们着重要谈到的是它们之间的联系。

定理3.14 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列且 $m(E)<\infty$。若 $\{f_k(x)\}$ 几乎处处收敛于几乎处处有限的函数 $f(x)$，则 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$。

证明 因为题设满足引理3.11的条件，所以对任给的 $\varepsilon>0$，可知

$$\lim_{j\to\infty} m\left(\bigcup_{k=j}^{\infty}\{x:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}\right)=0.$$

由此立即可得

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})=0.$$

这说明 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$。

定理3.15 设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x) \cdots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数。若对任给的 $\delta>0$，存在 $E_\delta \subset E$ 且 $m(E_\delta)<\delta$，使得 $\{f_k(x)\}$ 在 $E \setminus E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$，则 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$。

证明 对任给的 $\varepsilon, \delta>0$，依假设存在 $E_\delta \subset E$ 且 $m(E_\delta)<\delta$，及自然数 k_0，使得当 $k \geqslant k_0$ 时，有

$$|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon, \quad x \in E \setminus E_\delta.$$

由此可知

$$\{x: |f_k(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset E_\delta.$$

这说明当 $k \geqslant k_0$ 时，有

$$m(\{x: |f_k(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon\})<\delta.$$

类似于(点)收敛列与基本(或 Cauchy)列的关系，对于依测度收敛列我们也有同样的概念与结论。

定义3.7 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列。若对任给的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{\substack{k \to \infty \\ j \to \infty}} m(\{x: |f_k(x)-f_j(x)|>\varepsilon\})=0,$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 为 E 上的依测度基本列。

定理3.16 若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的依测度基本列，则在 E 上存在几乎处处有限的可测函数 $f(x)$，使得 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$。

证明 对每个自然数 i，可取 k_i，使得当 $l, j \geqslant k_i$ 时，有

$$m\left(\left\{x: |f_l(x)-f_j(x)| \geqslant \frac{1}{2^i}\right\}\right)<\frac{1}{2^i}.$$

而且我们可以假定 $k_i<k_{i+1}$。令

$$E_i=\left\{x: |f_{k_i}(x)-f_{k_{i+1}}(x)| \geqslant \frac{1}{2^i}\right\}, \quad i=1,2,\cdots,$$

则 $m(E_i)<2^{-i}$。现在研究 $\{E_i\}$ 的上限集

$$S=\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty}E_i,$$

易知 $m(S)=0$。若 $x\overline{\in}S$，则存在 j，使得

$$x\in E\setminus\bigcup_{i=j}^{\infty}E_i.$$

从而当 $i\geqslant j$ 时，有 $|f_{k_{i+1}}(x)-f_{k_i}(x)|<2^{-i}$。由此可知当 $l\geqslant j$ 时，有

$$\sum_{i=l}^{\infty}|f_{k_{i+1}}(x)-f_{k_i}(x)|\leqslant\frac{1}{2^{l-1}}.$$

这说明级数

$$f_{k_1}(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\left[f_{k_{i+1}}(x)-f_{k_i}(x)\right]$$

在 $E\setminus S$ 上是绝对收敛的，因此 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 E 上是几乎处处收敛的，设其极限函数为 $f(x)$，$f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数。

此外，易知 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 $E\setminus\bigcup_{i=j}^{\infty}E_i$ 上是一致收敛于 $f(x)$ 的。由于

$$m\left(\bigcup_{i=j}^{\infty}E_i\right)<2^{-j+1},$$

故 $f(x)$ 及 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 E 上满足定理3.15的条件，于是 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$。

最后，由不等式

$$\begin{aligned}&m(\{x:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})\\&\leqslant m\left(\left\{x:|f_k(x)-f_{k_i}(x)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)\\&\quad+m\left(\left\{x:|f_{k_i}(x)-f(x)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)\end{aligned}$$

可得 $$\lim_{k\to\infty} m(\{x: |f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})=0.$$

注意，若$\{f_n(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$，则$\{f_n(x)\}$定是E上依测度基本列。此外，从上一定理的证明中已经可以看到，在依测度基本列中一定可抽出一个子列是几乎处处收敛的。从而我们有下述结果：

定理3.17 (Riesz 定理) 若$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$,则存在子列$\{f_{k_i}(x)\}$，使得

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x)=f(x) \quad \text{a.e.}.$$

证明 因为$\{f_k(x)\}$依测度收敛于$f(x)$，所以$\{f_k(x)\}$是依测度基本列。从而由上述定理的证明中可知，存在子列$\{f_{k_i}(x)\}$以及可测函数$g(x)$，使得

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x)=g(x) \quad \text{a.e.}.$$

易知$\{f_{k_i}(x)\}$也是依测度收敛于$g(x)$的。但按假设,$\{f_{k_i}(x)\}$应依测度收敛于$f(x)$。从而知$f(x)$与$g(x)$对等。

§3.3 可测函数与连续函数

(一) Лузин 定理

可测函数与连续函数有着密切的关系，这种关系使我们对可测函数的了解更加深入，也是研究可测函数的有效手段。

定理3.18(Лузин 定理) 若$f(x)$是E上的几乎处处有限的可测函数,则对任给的$\delta>0$，存在E中的一个闭集F，$m(E\setminus F)<\delta$，使得$f(x)$是F上的连续函数。

证明 不妨假定$f(x)$是实值函数，这是因为

$$m(\{x: |f(x)|=+\infty\})=0.$$

首先考虑$f(x)$是可测简单函数的情形：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{p} c_i\chi_{E_i}(x), \quad x\in E, \quad \bigcup_{i=1}^{p} E_i=E.$$

此时，对任给的 $\delta>0$ 以及每个 E_i，可作 E_i 中的闭集 F_i，使得

$$m(E_i\setminus F_i)<\frac{\delta}{p},\quad i=1,2,\cdots,p.$$

因为当 $x\in F_i$ 时 $f(x)=c_i$，所以 $f(x)$ 在 F_i 上连续。而 F_1，F_2，$\cdots,F_p$ 是互不相交的，可知 $f(x)$ 在

$$F=\bigcup_{i=1}^{p}F_i$$

上连续。显然，F 是闭集且有

$$m(E\setminus F)=\sum_{i=1}^{p}m(E_i\setminus F_i)<\sum_{i=1}^{p}\frac{\delta}{p}=\delta.$$

其次考虑 $f(x)$ 是一般可测函数的情形，由于可作变换

$$g(x)=\frac{f(x)}{1+|f(x)|},\quad\left(f(x)=\frac{g(x)}{1-|g(x)|}\right),$$

故不妨假定 $f(x)$ 是有界函数。根据定理3.9可知，存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$。现在对任给的 $\delta>0$ 以及每个 $\varphi_k(x)$，均作 E 中的闭集 F_k，

$$m(E\setminus F_k)<\frac{\delta}{2^k},$$

使得 $\varphi_k(x)$ 在 F_k 上连续。令

$$F=\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k,$$

则 $F\subset E$，且有

$$m(E\setminus F)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(E\setminus F_k)<\delta.$$

因为每个 $\varphi_k(x)$ 在 F 上都是连续的，所以根据一致收敛性，易知 $f(x)$ 在 F 上连续。

注意，上述 Лузин 定理的结论不能改为：$f(x)$ 是 $E\setminus Z$ 上的连续函数，其中 $m(Z)=0$（见本章末尾的附注）。

推论3.19 若 $f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数，则对任给的 $\delta>0$，存在 $\mathbf{R}^n$ 上的一个连续函数 $g(x)$，使得

$$m(\{x\in E: f(x)\neq g(x)\})<\delta; \quad (3.8)$$

若 E 还是有界集，则可使上述 $g(x)$ 具有紧支集。

证明 由Лузин定理可知，对任给的 $\delta>0$，存在 E 中的闭集 F，$m(E\setminus F)<\delta$ 且 $f(x)$ 是 F 上的连续函数，从而根据连续函数的延拓定理1.28，存在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$，使得

$$f(x)=g(x), \quad x\in F.$$

因为 $\{x: f(x)\neq g(x)\}\subset E\setminus F$，所以得

$$m(\{x\in E: f(x)\neq g(x)\})\leqslant m(E\setminus F)<\delta.$$

若 E 是有界集，不妨设 $E\subset B(0,k)$，则作 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数 $\varphi(x)$，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$，且满足

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in F,\\ 0, & x\overline{\in} B(0,k).\end{cases}$$

从而将上述之 $g(x)$ 换成 $g(x)\varphi(x)$ 即得所求。

推论3.20 若 $f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数，则存在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x)=f(x) \quad \text{a.e.}, \quad x\in E. \quad (3.9)$$

证明 由推论3.19可知，对于任意的趋于零的正数列 $\{\varepsilon_k\}$ 与 $\{\delta_k\}$，存在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$，使得

$$m(\{x\in E: |f(x)-g_k(x)|\geqslant\varepsilon_k\})<\delta_k, \quad k=1,2,\cdots.$$

这说明 $\{g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$。从而根据 Riesz 定理3.17，可选子列 $\{g_{k_i}(x)\}$，使得

$$\lim_{i\to\infty} g_{k_i}(x)=f(x) \quad \text{a.e.}, \quad x\in E.$$

注 我们知道，$\mathbf{R}^1$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$$

可以表为(双重指标)连续函数列的累次极限：

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}[\cos(n!2\pi x)]^{2k}=f(x),\quad x\in R^1.$$

然而并不存在 R^1 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}g_k(x)=f(x),\quad x\in R^1.$$

例 若 $f(x)$ 是 R^1 上的实值可测函数，且对任意的 $x,y\in R^1$，有

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

则 $f(x)$ 是连续函数。

证明 因为 $f(x+h)-f(x)=f(h)$ 以及 $f(0)=0$，所以只需证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续即可。根据 Лузин 定理，可作有界闭集 F：$m(F)>0$，使 $f(x)$ 在 F 上（一致）连续。即对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$，有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon,\qquad |x-y|<\delta_1,\quad x,y\in F.$$

现在研究 $F-F$，由引理2.16知道，存在 $\delta_2>0$，使得

$$F-F\supset[-\delta_2,\delta_2].$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $z\in[-\delta,\delta]$ 时，由于存在 x，$y\in F$，使得 $z=x-y$，故可得

$$|f(z)|=|f(x-y)|=|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

这说明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的。

（二）* 复合函数的可测性

为了讨论可测函数复合运算的可测性问题，让我们首先用点集映射的观点把函数可测性的定义改述一下。大家知道，对于实值函数 $f(x)$ 来说，点集

$$\{x:f(x)>t\}\quad 与\quad f^{-1}((t,\infty))$$

是一致的。我们有下述结论：

引理3.21 若 $f(x)$ 是定义在 R^n 上的实值函数，则 $f(x)$ 在 R^n 上可测的充分且必要条件是：对于 R^1 中的任一开集，$f^{-1}(G)$ 是可测集。

证明 充分性是显然的，下面证明必要性。由假定知 $f^{-1}((t,$

∞))是可测集，故知对任意的区间$(a,b)\subset \boldsymbol{R}^1$，

$$f^{-1}((a,b))=f^{-1}((a,\infty))\setminus f^{-1}([b,\infty))$$

是可测的。若$G\subset \boldsymbol{R}^1$是开集，则

$$G=\bigcup_{k\geq 1}(a_k,b_k),$$

从而根据

$$f^{-1}(G)=\bigcup_{k\geq 1}f^{-1}(a_k,b_k),$$

可知$f^{-1}(G)$是可测集。

定理3.22 设$f(x)$是$\boldsymbol{R}^1$上的连续函数，$g(x)$是$\boldsymbol{R}^1$上的实值可测函数，则复合函数

$$h(x)=f(g(x))$$

是$\boldsymbol{R}^1$上的可测函数。

证明 对任一开集$G\subset \boldsymbol{R}^1$，因为$f^{-1}(G)$是开集，所以根据$g$的可测性知道$g^{-1}(f^{-1}(G))$是可测集。这说明$h(x)=f(g(x))$是$\boldsymbol{R}^1$上的可测函数。

注意，当$f(x)$是可测函数而$g(x)$是连续函数时，$f[g(x)]$就不一定是可测函数(见下例)。

例 设$\Phi(x)$是$[0,1]$上的Cantor函数，令

$$\Psi(x)=\frac{x+\Phi(x)}{2},$$

则$\Psi(x)$是$[0,1]$上的严格单调上升的连续函数。记C是$[0,1]$中的Cantor集，W是$\Psi(C)$中的不可测子集。

现在令$f(x)$是点集$\Psi^{-1}(W)$上的特征函数，作

$$g(x)=\Psi^{-1}(x),\qquad x\in[0,1],$$

显然，$f(x)=0$ a.e.，$g(x)$是$[0,1]$上的严格单调上升的连续函数(还满足Lipschitz条件)。易知$f[g(x)]$在$[0,1]$上不是可测函数。

定理3.23 设$T:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$是连续变换，当$Z\subset\boldsymbol{R}^n$且$m(Z)=0$时，$T^{-1}(Z)$是零测集。若$f(x)$是$\boldsymbol{R}^n$上的实值可测函数，则$f(T(x))$是$\boldsymbol{R}^n$上的可测函数。

证明 设G是$\boldsymbol{R}^1$中的任一开集，由假设知道$f^{-1}(G)$是可测集。不妨设

$$f^{-1}(G)=H\setminus Z,$$

其中$m(Z)=0$且H是G_δ型集，由假设可知$T^{-1}(Z)$是零测集以及$T^{-1}(H)$是G_δ型集，故从等式

$$T^{-1}(f^{-1}(G))=T^{-1}(H)\setminus T^{-1}(Z)$$

立即得出$T^{-1}(f^{-1}(G))$是可测集。这说明$f(T(x))$是$\boldsymbol{R}^n$上的可测函数。

推论3.24 设$f(x)$是$\boldsymbol{R}^n$的实值可测函数，$T:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$是非奇异线性变换，则$f(T(x))$是$\boldsymbol{R}^n$上的可测函数。

附 注

(一) Егоров 定理对于连续指标函数族一般是不成立的。

例 设$E\subset[0,1/2]$是不可测集，令

$$J=[0,1]\times[2,\infty),$$

$$D_n=\{(x,n+x):0\leqslant x\leqslant 1\},$$

并作函数$f:J\to\{0,1\}$：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x\in E+\dfrac{1}{n},\quad (x,y)\in D_n,\ n\geqslant 2,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

则有$\lim\limits_{y\to\infty}f(x,y)=0$，而 Егоров 定理的结论不成立。

但有下述结果：设$f(x)$与$f_t(x)\,(t\in(0,\infty))$是E上的实值可测函数，$m(E)<\infty$。若

(i) $\lim\limits_{t\to\infty}f_t(x)=f(x)$，$x\in E$；

(ii) 对每个n，$\sup\limits_{n\leqslant t\leqslant n+1}|f_t(x)-f(x)|$在$E$上可测，

则对任给的$\delta>0$，存在$E_\delta\subset E$且$m(E_\delta)<\delta$，使得当$t\to\infty$时，$f_t(x)$在$E\setminus E_\delta$上一致收敛于$f(x)$。

此外，可以作出[0,1]上收敛于零的连续函数列，但在任一

子区间上均不一致收敛。试比较 Егоров 定理的结论。

（二）Лузин 定理的结论不能改为：$m(E\setminus F)=0$而 $f(x)$ 在 F 上连续。举例如下：

在 $\boldsymbol{R}^1$中，记端点为有理数的一切开区间为$\{I_j\}$。作开区间列$\{J_k\}$如下：

(i) $|J_{k+1}|\leqslant|J_k|/3\quad(k=1,2,\cdots)$；

(ii) $J_{2j-1}\cup J_{2j}\subset I_j\quad(j=1,2,\cdots)$。

对于

$$x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}J_k \text{ 且 } x\notin\overline{\lim_{k\to\infty}}J_k$$

的点 x，必有最大指标$k=k_x$，使得 $x\in J_k$，现在根据 k_x 是偶数还是奇数把这些点 x 分成两个集合 A 与 B，即令

$$S_k=J_k\setminus\bigcup_{i=k+1}^{\infty}J_i,\quad A=\bigcup_{k=1}^{\infty}S_{2k},\quad B=\bigcup_{k=1}^{\infty}S_{2k-1}.$$

显然，A 与 B 皆为可测集且$A\cap B=\varnothing$。我们有

$$\begin{aligned}m(S_k)&=|J_k|-m\left(J_k\cap\bigcup_{i=k+1}^{\infty}J_i\right)\\&\geqslant|J_k|-\sum_{i=k+1}^{\infty}|J_i|\geqslant|J_k|\left(1-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{3^i}\right)\\&=\frac{1}{2}|J_k|>0.\end{aligned}$$

因为对每个k，有

$$S_{2k}\cup S_{2k-1}\subset J_{2k}\cup J_{2k-1}\subset I_k,$$

所以$m(A\cap I_k)>0$以及$m(B\cap I_k)>0$。

现在令$E=A\cup B$，并定义函数：

$$f(x)=\chi_A(x),\qquad x\in E,$$

则

$$m(\{x\in I_k:f(x)=1\})>0,\quad m(\{x\in I_k:f(x)=0\})>0.$$

由于 I_k 可取得很小，故除E中任一个零测集Z，$f(x)$不可能是 $E\setminus Z$ 上的连续函数。

（三）关于复合函数的可测性问题，我们还有下述结论：

若$f(x)$是定义在$[0,1]$上的实值函数，则存在$[0,1]$上的可测函数$g(x)$与$h(x)$，使得

$$f(x)=g[h(x)].$$

习　题

1. 设$f^2(x)$是$\boldsymbol{R}^n$上的可测函数，且点集

$$\{x:f(x)>0\}$$

是可测集，试证明$f(x)$是可测函数。

2. 设有$[a,b]$上的函数$f(x)$，若对任意的$[\alpha,\beta]\subset(a,b)$，$f(x)$是$[\alpha,\beta]$上的可测函数，试证明$f(x)$是$[a,b]$上的可测函数。

3. 设$f(x)$是$[a,b]$上的可微函数，试证明$f'(x)$是$[a,b]$上的可测函数。

4. 设有指标集I，$\{f_\alpha(x):\alpha\in I\}$是$\boldsymbol{R}^n$上可测函数族，试问函数$S(x)=\sup\{f_\alpha(x):\alpha\in I\}$在$\boldsymbol{R}^n$上是可测的吗？

5. 设$f(x)$是定义在可测集$E\subset\boldsymbol{R}^n$上的连续函数，试证明$f(x)$是E上的可测函数。

6. 设$f(x)=f(\xi_1,\xi_2)$是$\boldsymbol{R}^2$上的连续函数，$g_1(x),g_2(x)$是$[a,b]\subset\boldsymbol{R}^1$上的实值可测函数，试证明$F(x)=f(g_1(x),g_2(x))$是$[a,b]$上的可测函数。

7. 设$f(x)$是$\boldsymbol{R}^1$上的可测函数，且有

$$f(x+1)=f(x)\quad \text{a.e.},$$

试作函数$g(x)$，使得

$$g(x)=f(x)\quad \text{a.e.},\qquad g(x+1)=g(x),\qquad x\in\boldsymbol{R}^1.$$

8. 设$f(x)$是E上几乎处处有限的可测函数，$m(E)<\infty$，试证明对任意的$\varepsilon>0$，存在E上的有界可测函数$g(x)$，使得

$$m(\{x\in E:|f(x)-g(x)|>0\})<\varepsilon.$$

9. 设$\{f_k(x)\}$是$[a,b]$上的实值可测函数列，试证明存在正

数列$\{a_k\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} a_k \cdot f_k(x) = 0, \quad a.e. x\in[a,b].$$

10. 设$f(x), g(x)$是$(0,1)$上的可测函数，且对任意的$t\in R^1$有

$$m(\{x: f(x)\geq t\}) = m(\{x: g(x)\geq t\})$$

（即互为等可测函数），若$f(x)$与$g(x)$都是单调下降且左连续的函数，试证明$f(x)=g(x)$ $(0<x<1)$。

11. 设$f(x)$定义在开集$G\subset R^n$上，试证明下列命题等价：

(i) $f(x)$在G上几乎处处连续。

(ii) 对任意的$t\in R^1$，作点集

$$E_1=\{x\in G: f(x)>t\}, \quad E_2=\{x\in G: f(x)<t\},$$

则$E_i(i=1,2)$中几乎处处都是内点。

12. 设$\{f_k(x)\}$是E上的实值可测函数列，$m(E)<\infty$，试证明

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=0, \quad a.e. x\in E$$

的充分且必要条件是：对任意的$\varepsilon>0$有

$$\lim_{j\to\infty} m(\{x\in E: \sup_{k\geq j}\{|f_k(x)|\}\geq\varepsilon\})=0.$$

13. 设$f(x), f_1(x), \cdots, f_k(x), \cdots$是$[a,b]$上几乎处处有限的可测函数，且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad a.e. x\in[a,b],$$

试证明存在$E_n\subset[a,b]$ $(n=1,2,\cdots)$，使得

$$m\left([a,b]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=0,$$

而$\{f_k(x)\}$在每个E_n上一致收敛于$f(x)$。

14. 设$\{f_n(x)\}$是$[0,1]$上几乎处处收敛于零的几乎处处有限的可测函数列，试证明存在数列$\{t_n\}$满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}|t_n|=\infty,$$

使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n f_n(x)| < \infty, \quad \text{a.e.}\ x \in [0,1].$$

15. 设$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$，$\{g_k(x)\}$在E上依测度收敛于$g(x)$，试证明$\{f_k(x)+g_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)+g(x)$；又若$m(E)<\infty$，试证明$\{f_k(x)\cdot g_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)\cdot g(x)$。

16. 设$f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$是$E$上几乎处处有限的可测函数，且$m(E)<\infty$。若在$\{f_k(x)\}$的任一子列$\{f_{k_i}(x)\}$中均存在几乎处处收敛于$f(x)$的子列$\{f_{k_{i_j}}(x)\}$，试证明$\{f_k(x)\}$在$E$上依测度收敛于$f(x)$。

17. 设$m(E)<\infty$，$f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$是$E$上几乎处处有限的可测函数，试证明$\{f_k(x)\}$在$E$上依测度收敛于$f(x)$的充分且必要条件是：

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{\alpha>0} \{\alpha + m(\{x: |f_k(x)-f(x)| > \alpha\})\} = 0.$$

18. 假设$\{f_{k,i}(x)\}$在$E\subset \mathbf{R}^1$上依测度收敛于$f_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots)$，又假设$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$，试证明在$\{f_{k,i}(x)\}$中存在子列在E上依测度收敛于$f(x)$。

19. 设$\{f_k(x)\}$在$[a,b]$上依测度收敛于$f(x)$，$g(x)$是$\mathbf{R}^1$上的连续函数，试证明$\{g[f_k(x)]\}$在$[a,b]$上依测度收敛于$g[f(x)]$。

20*. 设$\{f_k(x)\}$是$E\subset \mathbf{R}^1$上的依测度收敛列，且存在常数M，使得对任意的k有

$$|f_k(x_1)-f_k(x_2)| \leqslant M|x_1-x_2|, \quad x_1, x_2 \in E,$$

试问$\{f_k(x)\}$是E上的几乎处处收敛列吗？

21. 设有定义在可测集$E\subset \mathbf{R}^n$上的函数$f(x)$，且对任给的$\delta>0$，存在E中的闭集F，$m(E\setminus F)<\delta$，使得$f(x)$在F上连续，试证明$f(x)$是E上的可测函数。

22. 设$f_k(x)$ $(k=1,2,\cdots)$是E上正值可测函数列，且$f_k(x)$

在E上依测度收敛到$f(x)$，$a>0$，试证明$f_k^a(x)$在E上依测度收敛于$f^a(x)$。

23．设$f(x)$是$\boldsymbol{R}^1$上的有界函数，试证明：存在$\boldsymbol{R}^1$上几乎处处连续的函数$g(x)$，有

$$f(x)=g(x),\qquad \text{a.e.}\, x\in \boldsymbol{R}^1$$

的充分必要条件是：存在$E\subset\boldsymbol{R}^1$，$m(\boldsymbol{R}^1\setminus E)=0$，使$f(x)$在$E$上连续。

24．设$\{f_{k,i}(x)\}$是$[0,1]$上可测函数列，且满足

(i) $\lim\limits_{i\to\infty} f_{k,i}(x)=f_k(x),\qquad \text{a.e.}\, x\in[0,1]$，

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=g(x),\qquad \text{a.e.}\, x\in[0,1]$，

则存在$\{k_j\}$，$\{i_j\}$，使得

$$\lim_{j\to\infty} f_{k_j,i_j}(x)=g(x),\qquad \text{a.e.}\, x\in[0,1].$$

25*．设$f(x)$是(a,b)上的实值可测函数且满足

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2},\qquad x,y\in(a,b),$$

试证明$f(x)$在(a,b)上是连续的。

26*．设$f(x)$是$[a,b]$上的实值可测函数，试证明存在数列$\{h_k\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} h_k=0,\qquad \lim_{k\to\infty} f(x+h_k)=f(x),\qquad \text{a.e.}\, x\in[a,b].$$

27*．设$f(x)$是E上可测函数，试证明对$\boldsymbol{R}^1$中任一Borel可测集B，$f^{-1}(B)=\{x:f(x)\in B\}$是可测集。

28*．设$f(x)$是E上实值可测函数，$g(x)$是$\boldsymbol{R}^1$上实值Borel可测函数，则$h(x)=g[f(x)]$是E上可测函数。

29*．设$\{f_n(x)\}$是$\boldsymbol{R}^1$上的可测函数列，$\{\lambda_n\}$是正数列，若有

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\left(\left\{x:\frac{|f_n(x)|}{\lambda_n}>1\right\}\right)<\infty,$$

试证明$\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x)|/\lambda_n\leqslant 1,\qquad \text{a.e.}\, x\in\boldsymbol{R}^1$。

第四章 Lebesgue积分

Lebesgue积分是在Lebesgue测度理论的基础上建立起来的。这一理论可以统一处理函数有界与无界的情形，而且函数也可以定义在更一般的点集(不一定是闭区间$[a,b]$)上，特别是，它提供了比Riemann积分更加广泛而有用的收敛定理。

定义Lebesgue积分有着各种不同的等价方法，我们在这里所采用的是，首先定义非负可测简单函数的积分，再注意到可测简单函数与非负可测函数的关系，就可以给出后者的积分定义。最后通过表示式$f(x)=f^+(x)-f^-(x)$，我们也就有了一般可测函数的积分的定义。这种处理积分的途径实际上适用于一般测度空间。

§4.1 非负可测函数的积分

(一)非负可测简单函数的积分

定义4.1 设$h(x)$是$\boldsymbol{R}^n$上的非负可测简单函数，它在点集A_i $(i=1,2,\cdots,p)$上取值c_i：

$$h(x)=\sum_{i=1}^{p}c_i\chi_{A_i}(x).$$

若$E\in\mathscr{M}$，则定义h在E上的积分为

$$\int_E h(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{p}c_i m(E\cap A_i).$$

这里积分符号下的$\mathrm{d}x$是$\boldsymbol{R}^n$上Lebesgue测度的标志。

注意，我们曾约定$0\cdot\infty=0$。此外，由定义立即得知，$\int_E h(x)\mathrm{d}x$只与$h(x)$在E上的值有关。

例 设在$\boldsymbol{R}^1$上定义函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数，}\\ 0, & x\text{ 是无理数。}\end{cases}$$

我们有

$$\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x=0.$$

定理4.1（积分的线性性质） 设 $h(x),g(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的非负可测简单函数，h 在点集 A_i 上取值 $a_i(i=1,2,\cdots,p)$，g 在点集 B_j 上取值 $b_j(j=1,2,\cdots,q)$，$E\in\mathscr{M}$，我们有

(i) 若 c 是非负常数，则

$$\int_E ch(x)\mathrm{d}x=c\int_E h(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) $\displaystyle\int_E (h(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_E h(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x.$

证明 (i) 可从定义直接得出。

(ii) 因为 $h(x)+g(x)$ 在 $A_i\cap B_j$（假定非空）上取值 a_i+b_j，所以有

$$\begin{aligned}\int_E (h(x)+g(x))\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_i+b_j)m(E\cap A_i\cap B_j)\\&=\sum_{i=1}^{p}a_i\sum_{j=1}^{q}m(E\cap A_i\cap B_j)\\&\quad+\sum_{j=1}^{q}b_j\sum_{i=1}^{p}m(E\cap A_i\cap B_j)\\&=\sum_{i=1}^{p}a_im(E\cap A_i)+\sum_{j=1}^{q}b_jm(E\cap B_j)\\&=\int_E h(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

定理4.2 若 $\{E_k\}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的递增可测集合列，$h(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的非负可测简单函数，则

$$\int_E h(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}h(x)\mathrm{d}x,\qquad E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k.$$

证明 设 $h(x)$ 在 A_i 上取值为 $a_i(i=1,2,\cdots,p)$，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} h(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{p}a_i m(E_k\cap A_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{p}a_i m(E\cap A_i)=\int_E h(x)\mathrm{d}x.$$

（二）非负可测函数的积分

定义4.2 设 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数。我们定义 f 在 E 上的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sup_{\substack{h(x)\leqslant f(x)\\ x\in E}}\left\{\int_E h(x)\mathrm{d}x : h(x)\text{是}\mathbf{R}^n\text{上的非负简单可测函数}\right\}.$$

这里的积分可以是 $+\infty$；若

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x<\infty,$$

则称 $f(x)$ 在 E 上是可积的，或 $f(x)$ 是 E 上的可积函数。

由定义立即可知下列简单事实：

(i) 设 $f(x),g(x)$ 是 E 上的非负可测函数。若 $f(x)\leqslant g(x)$ $(x\in E)$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

事实上，若用 $h(x)$ 表示非负可测简单函数（在 $\mathbf{R}^n$ 上），且

$h(x)\leqslant f(x)\ (x\in E)$，　则 $h(x)\leqslant g(x)\ (x\in E)$。

从而由定义可知

$$\int_E h(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

由此即得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sup_{\substack{h(x)\leqslant f(x)\\ x\in E}}\left\{\int_E h(x)\mathrm{d}x\right\}\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) 若 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数，A 是 E 中的可测子集，

则

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x.$$

事实上，我们有

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \sup_{\substack{h(x)\leqslant f(x)\\ x\in A}}\left\{\int_A h(x)\mathrm{d}x\right\}$$

$$= \sup_{\substack{h(x)\leqslant f(x)\chi_A(x)\\ x\in E}}\left\{\int_A h(x)\mathrm{d}x\right\}$$

$$= \sup_{\substack{h(x)\leqslant f(x)\chi_A(x)\\ x\in E}}\left\{\int_E h(x)dx\right\} = \int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x.$$

定理 4.3 设 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数。若 c 是非负的常数，则

$$\int_E cf(x)\mathrm{d}x = c\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 根据定理4.1之(i)以及定义4.2可直接得出上式。

定理4.4(Levi渐升列积分定理) 设有定义在E上的非负可测函数列：

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_k(x)\leqslant\cdots,$$

且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad x\in E,$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

证明 由题设知$f(x)$是E上的非负可测函数，积分$\int_E f(x)\mathrm{d}x$有定义。因为

$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f_{k+1}(x)\mathrm{d}x, \quad k=1,2,\cdots,$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$ 有定义，而且从函数列的渐升性可知

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

现在令c满足$0<c<1$，$h(x)$是$\mathbf{R}^n$上的非负可测简单函数且

$$h(x)\leqslant f(x)\qquad x\in E,$$

记
$$E_k=\{x\in E:f_k(x)\geqslant ch(x)\},\quad k=1,2,\cdots,$$

则$\{E_k\}$是递增集合列且$\lim\limits_{k\to\infty}E_k=E$。根据定理4.2可知

$$\lim_{k\to\infty}c\int_{E_k}h(x)\mathrm{d}x=c\int_E h(x)\mathrm{d}x.$$

于是从不等式

$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{E_k}f_k(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{E_k}ch(x)\mathrm{d}x=c\int_{E_k}h(x)\mathrm{d}x$$

得到

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\geqslant c\int_E h(x)\mathrm{d}x.$$

在上式中令$c\to 1$，有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_E h(x)\mathrm{d}x.$$

依f的积分定义即知

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

上一定理表明，对于非负渐升可测函数列来说，极限与积分的次序可以交换。此外，由于非负可测函数是渐升的非负可测简单函数列的极限，因而使得积分理论中的许多结果可直接从简单函数的积分性质得到。

定理4.5(积分的线性性质) 设$f(x)$，$g(x)$是E上的非负可测函数，α，β是非负常数，则

$$\int_E(\alpha f(x)+\beta g(x))\mathrm{d}x=\alpha\int_E f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由定理4.3可知，只需证明$\alpha=\beta=1$的情形，现在设$\{\varphi_k(x)\}$，$\{\psi_k(x)\}$是非负可测简单函数渐升列，且有

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\quad\lim_{k\to\infty}\psi_k(x)=g(x),\quad x\in E;$$

则$\{\varphi_k(x)+\psi_k(x)\}$仍为非负可测简单函数渐升列，且有

$$\lim_{k\to\infty}(\varphi_k(x)+\psi_k(x))=f(x)+g(x),\quad x\in E.$$

从而由简单函数积分的线性性质和定理4.1可知，

$$\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_E(\varphi_k(x)+\psi_k(x))\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_E\varphi_k(x)\mathrm{d}x+\lim_{k\to\infty}\int_E\psi_k(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

我们不难证明下列简单事实：

(i) 若 $m(E)=0$，$f(x)$是E上非负可测函数，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0;$$

(ii) 若$f(x)$，$g(x)$是E上的非负可测函数，且$f(x)=g(x)$ a.e.，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 令$E_1=\{x\in E:f(x)\neq g(x)\}$，$E_2=E\setminus E_1$，$m(E_1)=0$。我们有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)[\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{E_1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_2}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{E_1}g(x)\mathrm{d}x+\int_{E_2}g(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

(iii) 若$f(x)$是E上的非负可积函数，则$f(x)$在E上是几乎处处有限的。

证明 令$E_k=\{x\in E:f(x)>k\}$，则有

$$\{x\in E:f(x)=+\infty\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k.$$

对于每个k，可得

$$k\cdot m(E_k)\leqslant\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x<\infty,$$

从而知道$\lim\limits_{k\to\infty} m(E_k)=0$，这就是说，$m(\{x\in E: f(x)=+\infty\})=0$。

定理4.6(逐项积分) 若$\{f_k(x)\}$是E上的非负可测函数列，则有

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

证明 令$S_m(x)=\sum\limits_{k=1}^{m} f_k(x)$，则$\{S_m(x)\}$是$E$上的非负可测函数的渐升列，且

$$\lim_{m\to\infty} S_m(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

从而根据渐升列积分定理以及积分的线性性质，可知

$$\begin{aligned}\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\mathrm{d}x&=\lim_{m\to\infty}\int_E S_m(x)\,\mathrm{d}x\\&=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

推论 4.7 设$E_k\in\mathscr{M}$ $(k=1,2,\cdots)$，$E_i\cap E_j=\varnothing\ (i\neq j)$。若$f(x)$是$E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$上的非负可测函数，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.3}$$

证明 由逐项积分定理可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f(x)\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x\\&=\int_E f(x)\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

特别地，当 $f(x)\equiv 1$ 时，上式就是测度的可数可加性，从这里还可看到，通过点集的特征函数，积分与测度问题是可以互相转化的。

例 若 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 是[0,1]中的可测集，[0,1]中每一点至少属于上述集合中的 k 个($k\leqslant n$)，则在 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 中必有一个点集的测度大于或等于 k/n。

证明 因为当 $x\in[0,1]$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\chi_{E_i}(x)\geqslant k,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}m(E_i)=\sum_{i=1}^{n}\int_{[0,1]}\chi_{E_i}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{[0,1]}\sum_{i=1}^{n}\chi_{E_i}(x)\mathrm{d}x\geqslant k.$$

若每一个 $m(E_i)$ 皆小于 k/n，则

$$\sum_{i=1}^{n}m(E_i)<\frac{k}{n}\cdot n=k.$$

这与上式矛盾，故存在 i_0，使得 $m(E_{i_0})\geqslant k/n$。

定理 4.8(Fatou 引理) 若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列，则

$$\int_E\varliminf_{k\to\infty}f_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x. \tag{4.4}$$

证明 令 $g_k(x)=\inf\{f_j(x):j\geqslant k\}$，我们有

$$g_k(x)\leqslant g_{k+1}(x),\quad k=1,2,\cdots,$$

而且得到

$$\varliminf_{k\to\infty}f_k(x)=\lim_{k\to\infty}g_k(x),\quad x\in E.$$

从而根据渐升列积分定理可知，

$$\int_E\varliminf_{k\to\infty}f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E\lim_{k\to\infty}g_k(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

Fatou 引理常可用于判断极限函数的可积性。例如当E上的非负可测函数列$\{f_k(x)\}$满足

$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant M, \quad k=1,2,\cdots$$

时，我们就得到

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant M.$$

下面的例子说明 Fatou 引理中的不等号是可能成立的。

例 在$[0,1]$上作非负可测函数列：

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ n, & 0<x<\dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases} \quad n=1,2,\cdots.$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0 \quad (x\in[0,1])$，因此我们有

$$\int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0 < 1 = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

作为本节的结束，我们给出一个非负可测函数可积的另一等价条件。

定理 4.9 设$f(x)$是E上的几乎处处有限的非负可测函数，$m(E)<\infty$。在$[0,\infty)$上作如下划分

$$0=y_0<y_1<\cdots<y_k<y_{k+1}<\cdots\to\infty,$$

其中$y_{k+1}-y_k<\delta(k=0,1,\cdots)$。若令

$$E_k=\{x\in E: y_k\leqslant f(x)<y_{k+1}\}, \quad k=0,1,\cdots,$$

则$f(x)$在E上是可积的，当且仅当级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k)<\infty.$$

此时有

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k)=\int_E f(x)\mathrm{d}x. \qquad (4.5)$$

证明 因为

$$y_k m(E_k) \leqslant \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x \leqslant y_{k+1} m(E_k),$$

所以我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k) \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1} m(E_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (y_{k+1} - y_k) m(E_k) + \sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k)$$

$$\leqslant \delta m(E) + \sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k).$$

由此立即可知结论成立。

§4.2 一般可测函数的积分

(一) 积分的定义与初等性质

定义 4.3 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数。若积分

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x, \quad \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

中至少有一个是有限值，则称

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在 E 上的积分。当上式右端两个积分值皆为有限时，则称 $f(x)$ 在 E 上是可积的．或称 $f(x)$ 是 E 上的可积函数。在 E 上可积的函数的全体记为 $L(E)$。通常把 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 积分记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

由于等式

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

成立，故知在 $f(x)$ 可测的条件下，$f(x)$ 的可积性与 $|f(x)|$ 的可积性是等价的，且有

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x. \tag{4.6}$$

例 若 $f(x)$ 是 E 上的有界可测函数，且 $m(E)<\infty$，则

$$f\in L(E).$$

事实上，不妨设 $|f(x)|\leqslant M(x\in E)$，由于 $|f(x)|$ 是 E 上的非负可测函数，故有

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_E M\mathrm{d}x = M\cdot m(E)<\infty.$$

由定义立即可知下述简单事实：

(i) 若 $f\in L(E)$，则 $f(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的。

(ii) 若 $E\in\mathscr{M}$，且 $f(x)=0$ a.e.（于 E），则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0.$$

事实上，因为 $|f(x)|=0$ a.e.，所以

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

(iii) 若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，$g\in L(E)$ 且 $|f(x)|\leqslant g(x)$ $(x\in E)$，则 $f\in L(E)$。

事实上，由非负可测函数的积分性质可知，

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x<\infty.$$

从上述事实可以看到，若 $f\in L(E)$，且 $g(x)=f(x)$ a.e.，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

因此，改变一个函数在零测集上的值，不会影响该函数的可积性与积分值。

定理 4.10（积分的线性性质） 若 $f,g\in L(E)$，$c\in R^1$，则

(i) $\int_E cf(x)\mathrm{d}x=c\int_E f(x)\mathrm{d}x$；

(ii) $\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x$.

证明 不妨假定 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是实值函数。

(i) 由

$$f^+(x) = (|f(x)| + f(x))/2, \quad f^-(x) = (|f(x)| - f(x))/2$$

立即可知：当 $c \geqslant 0$ 时，

$$(cf)^+ = cf^+, \quad (cf)^- = cf^-.$$

根据积分定义以及非负可测函数积分的线性性质，可得

$$\int_E cf(x)\mathrm{d}x = \int_E cf^+(x)\mathrm{d}x - \int_E cf^-(x)\mathrm{d}x$$

$$= c\left[\int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x\right] = c\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

当 $c=-1$ 时，$(-f)^+ = f^-$，$(-f)^- = f^+$。同理可得

$$\int_E (-f(x))\mathrm{d}x = \int_E f^-(x)\mathrm{d}x - \int_E f^+(x)\mathrm{d}x = -\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

当 $c<0$ 时，$cf(x) = -|c|f(x)$。由上述结论可得

$$\int_E cf(x)\mathrm{d}x = \int_E -|c|f(x)\mathrm{d}x = -\int_E |c|f(x)\mathrm{d}x$$

$$= -|c|\int_E f(x)\mathrm{d}x = c\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

$cf(x)$ 的可积性是明显的。

(ii) 首先由于 $|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$，故可知 $f+g \in L(E)$。其次注意到

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+,$$

从而由非负可测函数积分的线性性质得

$$\int_E (f+g)^+(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x + \int_E g^-(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_E (f+g)^-(x)\mathrm{d}x + \int_E f^+(x)\mathrm{d}x + \int_E g^+(x)\mathrm{d}x.$$

因为式中每项积分值都是有限的，所以可移项且得到

$$\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

关于函数的乘积我们有：若$f\in L(E)$，$g(x)$是E上的有界可测函数时，则 $f\cdot g\in L(E)$。这是因为我们有

$$|f(x)\cdot g(x)|\leqslant|f(x)|\cdot\sup_{x\in E}|g(x)|,\qquad x\in E.$$

定理 4.11（积分的绝对连续性） 若 $f\in L(E)$，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当E中子集 e 的测度 $m(e)<\delta$ 时，有

$$\left|\int_e f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_e |f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon. \tag{4.7}$$

证明 不妨假定$f(x)\geqslant 0$。根据渐升列的积分定理4.4可知，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在可测简单函数 $\varphi(x)$，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)$ $(x\in E)$，使得

$$\int_E[f(x)-\varphi(x)]\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x-\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现在假设$|\varphi(x)|\leqslant M$，我们取 $\delta=\varepsilon/2M$，则当 $e\subset E$ 且 $m(e)<\delta$ 时，就有

$$\begin{aligned}\int_e f(x)\mathrm{d}x &= \int_e f(x)\mathrm{d}x-\int_e\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_e\varphi(x)\mathrm{d}x\\ &\leqslant\int_E[f(x)-\varphi(x)]\mathrm{d}x+\int_e\varphi(x)\mathrm{d}x\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+M\cdot m(e)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

定理 4.12 设 $E_k\in\mathscr{M}(k=1,2,\cdots)$，$E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$。若 $f(x)$在

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$$

上可积，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.8}$$

证明 根据 $f\in L(E)$ 以及非负可测函数积分的可数可加性（推论4.7），我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f^{\pm}(x)\,\mathrm{d}x=\int_E f^{\pm}(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_E|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty.$$

从而可知

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_{E_k} f^{+}(x)\,\mathrm{d}x-\int_{E_k} f^{-}(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=\int_E f^{+}(x)\,\mathrm{d}x-\int_E f^{-}(x)\,\mathrm{d}x=\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例（可积函数几乎处处为零的判别法） 设 $f\in L[a,b]$。若对任意的 $c\in[a,b]$ 有

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

则 $f(x)=0$ a.e.。

证明 若结论不成立，则存在 $E\subset[a,b]$，$m(E)>0$ 且 $f(x)$ 在 E 上的值不等于零。不妨假定在 E 上 $f(x)>0$。作闭集 F，$F\subset E$ 且 $m(F)>0$，并令 $G=(a,b)\setminus F$，我们有

$$\int_G f(x)\,\mathrm{d}x+\int_F f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

因为 $\int_F f(x)\,\mathrm{d}x>0$，所以

$$\sum_{n\geqslant 1}\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_G f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0,$$

其中 $\{(a_n,b_n)\}$ 为开集 G 的构成区间，从而存在 n_0，使得

$$\int_{a_{n_0}}^{b_{n_0}} f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0.$$

由此可知

$$\int_a^{a_{n_0}} f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0\quad 或\quad \int_a^{b_{n_0}} f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0,$$

这与假设矛盾。

例* 设$g(x)$是E上的可测函数。若对任意的$f\in L^1(E)$，都有$f\cdot g\in L^1(E)$，则除一个零测集外，$g(x)$是有界函数。

事实上，如果结论不成立，那末一定存在自然数子列$\{k_i\}$，使得

$$m(\{x\in E:k_i\leqslant|g(x)|<k_{i+1}\})=m(E_i)>0,\quad i=1,2,\cdots.$$

现在作函数：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sign} g(x)}{i^{1+(1/2)}\cdot m(E_i)}, & x\in E_i,\\ 0, & x\bar{\in} E_i,\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots.$$

因为

$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{1+(1/2)}\cdot m(E_i)}m(E_i)<\infty,$$

所以$f\in L^1(E)$。但我们有

$$\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k_i}{i^{1+(1/2)}\cdot m(E_i)}m(E_i)=\infty.$$

这说明$f\cdot g\bar{\in}L(E)$，矛盾。

定理 4.13（积分变量的平移变换） 若$f\in L(\boldsymbol{R}^n)$，则对任意的$y\in\boldsymbol{R}^n$，$f(x+y)\in L(\boldsymbol{R}^n)$，且有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x+y)\mathrm{d}x=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\mathrm{d}x.\qquad(4.9)$$

证明 只需考虑$f(x)\geqslant 0$的情形。首先看$f(x)$是非负可测简单函数：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}c_i\chi_{E_i}(x),\qquad x\in\boldsymbol{R}^n.$$

此时显然有

$$f(x+y)=\sum_{i=1}^{k}c_i\chi_{E_i-\{y\}}(x),$$

它仍是非负可测简单函数，从而知

$$\int_{R^n}f(x+y)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{k}c_i\,m(E_i-\{y\})$$

$$=\sum_{i=1}^{k}c_i\,m(E_i)=\int_{R^n}f(x)\mathrm{d}x.$$

其次考虑一般非负可测函数$f(x)$。此时存在非负可测简单函数渐升列$\{\varphi_k(x)\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\quad x\in\boldsymbol{R}^n.$$

显然，$\{\varphi_k(x+y)\}$仍为渐升列，且有

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x+y)=f(x+y),\quad x\in\boldsymbol{R}^n.$$

从而可知

$$\int_{R^n}f(x+y)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{R^n}\varphi_k(x+y)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_{R^n}\varphi_k(x)\mathrm{d}x=\int_{R^n}f(x)\mathrm{d}x.$$

（二）控制收敛定理

Lebesgue控制收敛定理为积分与极限次序的交换所提供的充分条件有着广泛的应用。它是Lebesgue积分理论中最重要的结果之一。

定理4.14（控制收敛） 设$f_k\in L(E)\,(k=1,2,\cdots)$，且有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)\ \text{a.e.}\ .$$

若存在E上的可积函数$F(x)$，使得

$$|f_k(x)|\leqslant F(x)\quad \text{a.e.},\quad k=1,2,\cdots,$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.10}$$

通常称$F(x)$为函数列$\{f_k(x)\}$的控制函数。

证明 显然，$f(x)$是E上的可测函数，且由$|f_k(x)|\leqslant F(x)$ a.e. 可知，$|f(x)|\leqslant F(x)$ a.e.，因此$f(x)$也是E上的可积函数。作函数列

$$g_k(x)=|f_k(x)-f(x)|,\quad k=1,2,\cdots,$$

则 $g_k\in L(E)$ 且 $0\leqslant g_k(x)\leqslant 2F(x)(k=1,2,\cdots)$。

根据 Fatou 引理，我们有

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty}[2F(x)-g_k(x)]\mathrm{d}x\leqslant \varliminf_{k\to\infty}\int_E[2F(x)-g_k(x)]\mathrm{d}x,$$

因为$F(x)$以及每个$g_k(x)$都是可积的，所以得到

$$\int_E 2F(x)\mathrm{d}x-\int_E \varlimsup_{k\to\infty} g_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E 2F(x)\mathrm{d}x-\varlimsup_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x.$$

消去$\int_E 2F(x)\mathrm{d}x$，并注意到$\varlimsup\limits_{k\to\infty} g_k(x)=0$ a.e.，可得

$$\varlimsup_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x=0.$$

最后，从不等式

$$\left|\int_E f_k(x)\mathrm{d}x-\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_E[f_k(x)-f(x)]\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\int_E g_k(x)\mathrm{d}x$$

立即可知，定理的结论成立。

推论4.15（逐项积分） 设$f_k\in L(E)(k=1,2,\cdots)$。若有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_E|f_k(x)|\mathrm{d}x<\infty,$$

则$\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)$在$E$上几乎处处收敛；若记其和函数为$f(x)$，则 $f\in L(E)$且有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.\qquad(4.11)$$

证明 作函数

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|,$$

由非负可测函数的逐项积分定理可知

$$\int_E F(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E|f_k(x)|\mathrm{d}x<\infty,$$

即 $F\in L(E)$。从而 $F(x)$ 在 E 上是几乎处处有限的。这说明级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$$

在 E 上几乎处处收敛。记其和函数为$f(x)$。由于

$$|f(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|=F(x)\quad \text{a.e.},$$

故 $f\in L(E)$。

现在令 $g_m(x)=\sum_{k=1}^{m}f_k(x)(m=1,2,\cdots)$，则

$$|g_m(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{m}|f_k(x)|\leqslant F(x),\qquad m=1,2,\cdots.$$

于是由控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_E\lim_{m\to\infty}g_m(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{m\to\infty}\int_E g_m(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

定理 4.16(积分号下求导) 设 $f(x,y)$是定义在 $E\times(a,b)$上的函数，它作为 x 的函数在 E 上是可积的，作为 y 的函数在(a,b)上是可微的，若存在$F\in L(E)$，使得

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x,y)\right|\leqslant F(x),\quad (x,y)\in E\times(a,b),$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_E f(x,y)\mathrm{d}x=\int_E\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x,y)\mathrm{d}x.\tag{4.12}$$

证明 任意取定 $y\in(a,b)$以及 $h_k\to0(k\to\infty)$，我们有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(x,y+h_k)-f(x,y)}{h_k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x,y),\quad x\in E,$$

而且当 k 充分大时下式成立(可从微分中值定理考察):

$$\left|\frac{f(x,y+h_k)-f(x,y)}{h_k}\right|\leqslant F(x),\quad x\in E.$$

从而由控制收敛定理可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_E f(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_E\frac{f(x,y+h_k)-f(x,y)}{h_k}\mathrm{d}x$$

$$=\int_E\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

§4.3 可积函数与连续函数

从可测函数与连续函数的密切联系中，可以导出可积函数与连续函数的一定关系，它将有助于我们进一步研究可积函数的性质。

定理4.17 若$f\in L(E)$，则对任给$\varepsilon>0$，存在$\boldsymbol{R}^n$上具有紧支集的连续函数$g(x)$，使得

$$\int_E|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.\tag{4.13}$$

证明 由于$f\in L(E)$，故对任给的$\varepsilon>0$，易知存在$\boldsymbol{R}^n$上具有紧支集的可测简单函数$\varphi(x)$，使得

$$\int_E|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

不妨设$|\varphi(x)|\leqslant M$，根据 Лузин 定理的推论，存在$\boldsymbol{R}^n$上具有紧支集的连续函数$g(x)$，使得$|g(x)|\leqslant M\ (x\in\boldsymbol{R}^n)$且有

$$m(\{x:|\varphi(x)-g(x)|>0\})<\frac{\varepsilon}{4M}.$$

从而可得

$$\int_E|\varphi(x)-g(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\{x:|\varphi(x)-g(x)|>0\}}|\varphi(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2M\cdot m(\{x:|\varphi(x)-g(x)|>0\})<\frac{\varepsilon}{2}.$$

最后，我们有

$$\int_E|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_E|f(x)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x+\int_E|\varphi(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

上述事实表明，若 $f\in L(E)$，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在 f 的分解：

$$f(x)=g(x)+[f(x)-g(x)]=f_1(x)+f_2(x),\quad x\in E,$$

其中 $f_1(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数，$|f_2(x)|$ 在 E 上的积分小于 ε。

定理4.18(平均连续性) 若 $f\in L(\boldsymbol{R}^n)$，则有

$$\lim_{h\to 0}\int_{R^n}|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0.\tag{4.14}$$

证明 任给 $\varepsilon>0$，作分解 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，其中 $f_1(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数，$f_2(x)$ 满足

$$\int_{R^n}|f_2(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}.$$

由于 $f_1(x)$ 具有紧支集且是一致连续函数，易知存在 $\delta>0$，使得当 $|h|<\delta$ 时有

$$\int_{R^n}|f_1(x+h)-f_1(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而我们有

$$\int_{R^n}|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{R^n}|f_1(x+h)-f_1(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{R^n}|f_2(x+h)-f_2(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\int_{R^n}|f_2(x+h)|\mathrm{d}x+\int_{R^n}|f_2(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}+2\int_{R^n}|f_2(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

例 若 $E\subset\boldsymbol{R}^n$ 是有界可测集，则

$$\lim_{|h|\to 0} m(E\cap(E+\{h\}))=m(E),\quad h\in\boldsymbol{R}^n.$$

证明 考察特征函数 $\chi_E(x)$，对于 $h\in\boldsymbol{R}^n$，我们有

$$\chi_{E+\{h\}}(x)=\chi_E(x-h),$$

以及

$$\chi_{E\cap(E+\{h\})}(x)=\chi_E(x-h)\cdot\chi_E(x).$$

从而可得

$$m(E\cap(E+\{h\}))=\int_{R^n}\chi_E(x)\cdot\chi_E(x-h)\mathrm{d}x.$$

因为

$$m(E)=\int_{R^n}\chi_E(x)\mathrm{d}x=\int_{R^n}\chi_E^2(x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$|m(E\cap(E+\{h\}))-m(E)|\leqslant\int_{R^n}|\chi_E(x)||\chi_E(x-h)-\chi_E(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{R^n}|\chi_E(x-h)-\chi_E(x)|\mathrm{d}x.$$

根据可积函数的平均连续性可知，上式右端当 $|h|\to 0$ 时趋于零。

推论4.19 若 $f\in L(E)$，则存在具有紧支集的阶梯函数列 $\{\varphi_k(x)\}$，使得

(i) $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)$ a.e. $x\in E$;

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E|f(x)-\varphi_k(x)|\mathrm{d}x=0.$

证明 根据定理4.17，可知对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\boldsymbol{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $g(x)$，使得

$$\int_E |f(x)-g(x)|dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

不妨设 $g(x)$ 的支集含于某个闭方体

$$I=\{x=(\xi_1,\cdots,\xi_n):-k_0\leqslant\xi_i\leqslant k_0(i=1,\cdots,n),\ k_0\text{是自然数}\}$$

内，由 $g(x)$ 的一致连续性不难证明，存在支集含于 I 内的阶梯函数 $\varphi(x)$，使得

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{N}c_i\chi_{I_i}(x),\qquad \int_I |g(x)-\varphi(x)|dx<\frac{\varepsilon}{2},$$

其中每个 I_i 可以是含于 I 内的二进方体。从而我们有

$$\int_E |f(x)-\varphi(x)|dx\leqslant\int_E |f(x)-g(x)|dx+\int_E|g(x)-\varphi(x)|dx$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\int_I |g(x)-\varphi(x)|dx=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

于是对 $\varepsilon_k=1/k(k=1,2,\cdots)$，就可取到具有紧支集的阶梯函数列 $\{\varphi_k(x)\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E|f(x)-\varphi_k(x)|dx=0.$$

对任给 $\sigma>0$，令

$$E_k(\sigma)=\{x\in E:|f(x)-\varphi_k(x)|\geqslant\sigma\},$$

则由于

$$\sigma\cdot m(E_k(\sigma))\leqslant\int_E|f(x)-\varphi_k(x)|dx,$$

可知 $m(E_k(\sigma))\to 0\quad(k\to\infty)$，即 $\{\varphi_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$。根据 Riesz 定理3.17，存在 $\{\varphi_k(x)\}$ 中的子列几乎处处收敛于 $f(x)$，此子列满足(i)与(ii)。

例 若 $\{g_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数列且满足

(i) $|g_n(x)|\leqslant M(x\in[a,b],\ n=1,2\cdots)$;

(ii) 对任意的 $c\in[a,b]$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^c g_n(x)dx=0,$$

则对任意的 $f\in L([a,b])$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g_n(x)\,dx=0.$$

证明 对于任给的 $\varepsilon>0$，可作阶梯函数 $\varphi(x)$，使得

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

不妨设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b)$ 上有表示式

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{p} y_i\chi_{[x_{i-1},x_i)}(x),\quad x\in[a,b),$$

其中 $a=x_0<x_1<\cdots<x_p=b$。因为

$$\left|\int_a^b \varphi(x)g_n(x)dx\right|\leqslant\sum_{i=1}^{p}\left|y_i\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_n(x)dx\right|,$$

且从假设可知存在 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，上式右端小于 $\varepsilon/2$，所以

$$\left|\int_a^b \varphi(x)g_n(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

最后，当 $n\geqslant n_0$ 时，得到

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)g_n(x)dx\right|&\leqslant\left|\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]g_n(x)dx\right|\\&\quad+\left|\int_a^b \varphi(x)g_n(x)dx\right|\\&<M\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

§ 4.4 Lebesgue 积分与 Riemann 积分

至此，我们已经基本上建立了 Lebesgue 的积分理论，在进一步介绍这一理论的其他内容以前，我们先来揭示它与 Riemann 积分的关系。这一关系可以用一个公式来表达，它不仅说明 Lebesgue 积分是 Riemann 积分的一种推广，而且为一般有界函数的 Riemann 可积性提供了一个简明的判别准则。本节仅讨论一维的情形。在这里要用到 Riemann 积分理论的下述事实：

设 $f(x)$ 是定义在 $I=[a,b]$ 上的有界函数，$\{\Delta^{(n)}\}$ 是对 $[a,b]$ 所作的分划序列：

$$\Delta^{(n)}: a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$|\Delta^{(n)}| = \max\{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}: 1 \leqslant i \leqslant k_n\}, \quad \lim_{n\to\infty} |\Delta^{(n)}| = 0.$$

若令(对每个 i 以及 n)

$$M_i^{(n)} = \sup\{f(x): x_{i-1}^{(n)} \leqslant x \leqslant x_i^{(n)}\},$$

$$m_i^{(n)} = \inf\{f(x): x_{i-1}^{(n)} \leqslant x \leqslant x_i^{(n)}\},$$

则关于 $f(x)$ 的 Darboux 上、下积分下述等式成立:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)}(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}),$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)}(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}).$$

引理4.20 设 $f(x)$ 是定义在 $I = [a, b]$ 上的有界函数,记 $\omega(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的振幅(函数),我们有

$$\int_I \omega(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx, \tag{4.15}$$

左端是 $\omega(x)$ 在 I 上的 Lebesgue 积分。

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是有界的,所以 $\omega(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数。由 §1.5之(二)中的例可知,$\omega(x)$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数,因此 $\omega \in L([a, b])$。

对于前面所说的分划序列 $\{\Delta^{(n)}\}$,作函数列

$$\omega_{\Delta^{(n)}}(x) = \begin{cases} M_i^{(n)} - m_i^{(n)}, & x \in (x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}), \\ 0, & x \text{ 是 } \Delta^{(n)} \text{ 的分点}, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \cdots, k_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

$$E = \{x \in [a, b]: x \text{ 是 } \Delta^{(n)} (n = 1, 2, \cdots) \text{ 的分点}\}.$$

显然 $m(E) = 0$ 且有

$$\lim_{n\to\infty} \omega_{\Delta^{(n)}}(x) = \omega(x), \quad x \in [a, b] \setminus E.$$

现在记 A, B 各为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的上、下确界,由于对一切 n 有

$\omega_{\Delta^{(n)}}(x)\leqslant A-B$，故根据控制收敛定理(控制函数是常数函数)可知，

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \omega_{\Delta^{(n)}}(x)\,\mathrm{d}x=\int_I \omega(x)\,\mathrm{d}x.$$

另一方面，因为

$$\begin{aligned}\int_I \omega_{\Delta^{(n)}}(x)\,\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^{k_n}(M_i^{(n)}-m_i^{(n)})(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})\\&=\sum_{i=1}^{k_n}M_i^{(n)}(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})-\sum_{i=1}^{k_n}m_i^{(n)}(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}),\end{aligned}$$

所以得到

$$\int_I \omega(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_I \omega_{\Delta^{(n)}}(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x-\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理4.21 若$f(x)$是定义在$[a,b]$上的有界函数，则$f(x)$在$[a,b]$上是Riemann可积的充分且必要条件是：$f(x)$在$[a,b]$上的不连续点集是零测集。

证明 必要性。若$f(x)$在$[a,b]$上是Riemann可积的，则$f(x)$的Darboux上、下积分相等。从而由(4.14)可知

$$\int_I \omega(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

因为$\omega(x)\geqslant 0$，所以$\omega(x)=0$ a.e.。这说明$f(x)$在$[a,b]$上是几乎处处连续的。

充分性。若$f(x)$在$[a,b]$上的不连续点集是零测集，则$f(x)$的振幅函数$\omega(x)$几乎处处等于零。从而由(4.14)可知

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x-\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_I \omega(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

即$f(x)$的Darboux上、下积分相等，$f(x)$在$[a,b]$上是Riemann可积的。

定理4.22 若$f(x)$在$I=[a,b]$上是Riemann可积的，则$f(x)$在$[a,b]$上是Lebesgue可积的，其积分值相同。

证明 首先，根据题设以及上述定理，$f(x)$在$[a,b]$上是几

乎处处连续的．因此 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界可测函数，$f\in L(I)$。

其次，对 $[a,b]$ 的任一分划

$$\Delta:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

根据 Lebesgue 积分的可加性质，我们有

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_{[x_{i-1},x_i]} f(x)\mathrm{d}x.$$

记 M_i, m_i 分别为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的上、下确界，则得

$$m_i(x_i-x_{i-1})\leqslant\int_{[x_{i-1},x_i]} f(x)\mathrm{d}x\leqslant M_i(x_i-x_{i-1}),$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

从而可知

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})\leqslant\int_I f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1}).$$

于是在上式左、右端对一切分划 Δ 各取上、下确界，立即得到

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

这说明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 积分与 Riemann 积分是相等的。

对于无界函数的积分或函数在无穷区间上的积分情况就不同了。此时，Riemann 积分是作为广义积分来定义的。例如 b 或 a 是 $f(x)$ 的瑕点时，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分定义为

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\quad 或\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

在这一极限存在的意义下，下述定理反映出 Lebesgue 积分是绝对收敛的积分。

定理4.27* 设 $\{E_k\}$ 是递增可测集合列，其并集是 E，

$$f\in L(E_k)\qquad k=1,2,\cdots.$$

若极限

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x$$

存在(有限)，则 $f\in L(E)$ 且有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 因为 $\{|f(x)|\chi_{E_k}(x)\}$ 是非负渐升列，且有

$$\lim_{k\to\infty}|f(x)|\chi_{E_k}(x)=|f(x)|,\quad x\in E,$$

所以由渐升列积分定理可知

$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_E|f(x)|\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x<\infty,$$

即 $f\in L(E)$。又由于在 E 上有

$$\lim_{k\to\infty}f(x)\chi_{E_k}(x)=f(x),\quad |f(x)\chi_{E_k}(x)|\leqslant|f(x)|,$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots.$$

故根据控制收敛定理可得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

在上述定理中，特别当 E_k 是矩体 I_k(例如 $\boldsymbol{R}^1$ 中 $E_k=[0,k]$ $(k=1,2,\cdots)$，$E=[0,\infty)$)且 $f(x)$ 在每个 I_k 上都是有界连续函数，以及条件

$$\lim_{k\to\infty}\int_{I_k}|f(x)|\mathrm{d}x<\infty$$

成立时，我们就可以通过计算Riemann 积分 $\int_{I_k}f(x)\mathrm{d}x$ 而得到Lebesgue积分

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{I_k} f(x)\mathrm{d}x$$

的值。

还应指出的是，上述计算方法与 $\{I_k\}$ 的选择无关，只要保证它递增到并集 E。

下面两个例子指出广义(即Cauchy意义下的)Riemann积分与Lebesgue积分无直接的蕴涵关系。

例 若$f(x)=\sin x/x$，则它在$[0,\infty]$上的广义积分为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

但我们有

$$\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x=+\infty.$$

这说明$f\overline{\in}L([0,\infty])$。

例 若在$[0,1]$上定义函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ (-1)^{n+1}n, & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}, \quad n=1,2,\cdots,\end{cases}$$

则其广义积分值为

$$\int_{\to 0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=1-\ln 2.$$

但我们有

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=+\infty.$$

这说明$f\overline{\in}L([0,1])$。

§4.5 重积分与累次积分

研究重积分与累次积分的关系是数学分析中最重要的课题之一。在Riemann积分的理论中，如果$f(x,y)$在$I=[a,b]\times[c,d]$上连续，那末下述等式

$$\int_I f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left\{\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x$$

成立。本节的目的是要在Lebesgue积分理论中建立类似的定理——Fubini定理。虽然它的证明要繁难一些，但因有着广泛的应用，这一努力是有价值的。

(一) Fubini 定理

不失一般性，我们令$n=p+q$，其中p,q是正整数，

$$\boldsymbol{R}^p,\quad x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_p);$$

$$\boldsymbol{R}^q,\quad y=(\xi_{p+1},\xi_{p+2},\cdots,\xi_n);$$

$$\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}^p\times\boldsymbol{R}^q,\quad (x,y)=(\xi_1,\cdots,\xi_p,\xi_{p+1},\cdots,\xi_n).$$

并记定义在$\boldsymbol{R}^n$上的函数f的积分为

$$\int_{R^p\times R^q}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{R^n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

我们要解决的问题是等式

$$\int_{R^n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

何时成立？

为此，让我们分析一下上述等式的意义。左端是f在$\boldsymbol{R}^n$上的积分，当然必须要求$f(x,y)$在$\boldsymbol{R}^n$上是可测的；右端称为累次积分，即$f(x,y)$先对y在$\boldsymbol{R}^q$上积分，然后

$$\int_{R^q}f(x,y)\mathrm{d}y$$

再对x在$\boldsymbol{R}^p$上进行积分．这就要保证$f(x,y)$作为y的函数在$\boldsymbol{R}^q$上是可测的，还须使

$$\int_{R^q}f(x,y)\mathrm{d}y$$

作为x的函数在$\boldsymbol{R}^p$上是可测的，在此基础上才能谈到它的积分及其相等的问题．与往常使用的方法一样，首先讨论函数是非负的情形。我们提出下述形式的定理。

定理4.24（非负可测函数情形的Tonelli定理） 设$f(x,y)$是$\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}^p\times\boldsymbol{R}^q$上的非负可测函数，我们有

(A) 对于几乎处处的$x\in\boldsymbol{R}^p$，$f(x,y)$作为y的函数是$\boldsymbol{R}^q$上的非负可测函数；

(B) 记

$$F_f(x)=\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y,$$

则$F_f(x)$是R^p上的非负可测函数；

(C) $$\int_{R^p} F_f(x)\mathrm{d}x=\int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{R^n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为非负可测函数是非负可测简单函数渐升列的极限，所以我们自然想到采用从简单函数类出发，再扩大到非负可测函数类的证明方法。下面导入的引理可以使定理的证明叙述得简明一些。我们记满足条件(A)，(B)及(C)的非负可测函数的全体为$\mathscr{F}$(显然非空)。

引理4.25

(i) 若$f\in\mathscr{F}$且$a\geqslant 0$，则$af\in\mathscr{F}$；

(ii) 若$f_1,f_2\in\mathscr{F}$，则$f_1+f_2\in\mathscr{F}$；

(iii) 若$f,g\in\mathscr{F}$，$f(x,y)-g(x,y)\geqslant 0$且$g\in L(R^n)$，则
$$f-g\in\mathscr{F};$$

(iv) 若$f_k\in\mathscr{F}(k=1,2,\cdots)$，$f_k(x,y)\leqslant f_{k+1}(x,y)(k=1,2,\cdots)$，且有
$$\lim_{k\to\infty} f_k(x,y)=f(x,y),$$
则$f\in\mathscr{F}$。

证明 根据积分的线性性质，(i)与(ii)是显然成立的。

(iii) 因为$g\in\mathscr{F}$且可积，所以由(C)可知$F_g(x)$是几乎处处有限的。由此再根据(B)可知，对几乎处处的x，$g(x,y)$看成y的函数在R^q上是几乎处处有限的。于是从等式
$$(f(x,y)-g(x,y))+g(x,y)=f(x,y)\quad \text{a.e.}$$
立即推得$f-g$是满足条件(A)，(B)与(C)的。

(iv) (A) 显然。

(B) $\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y = \lim\limits_{k\to\infty}\int_{R^q} f_k(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $$\int_{R^n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty}\int_{R^n} f_k(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \lim_{k\to\infty}\int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q} f_k(x,y)\mathrm{d}y$$
$$= \int_{R^p}\left[\lim_{k\to\infty}\int_{R^q} f_k(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$
$$= \int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q}\lim_{k\to\infty} f_k(x,y)\mathrm{d}y$$
$$= \int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

定理4.24的证明 首先，定理4.24的结论现在可改述为：凡非负可测函数皆属于$\mathscr{F}$。其次，根据上述引理之(iv)，我们只需指出非负可测简单函数属于$\mathscr{F}$即可。又由于上述引理之(ii)，实际上只需证明任一可测集E上的特征函数$\chi_E(x,y)$皆属于$\mathscr{F}$：

(1) $E = I_1\times I_2$，其中I_1与I_2各为$\boldsymbol{R}^p$与$\boldsymbol{R}^q$中的矩体。显然，我们有

$$\int_{R^n}\chi_E(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = m(E) = |I_1|\times|I_2|.$$

另一方面，对每个$x\in\boldsymbol{R}^p$，$\chi_E(x,y)$显然是$\boldsymbol{R}^q$上的非负可测函数，且有

$$F_\chi(x) = \begin{cases}|I_2|, & x\in I_1,\\ 0, & x\bar{\in} I_1.\end{cases}$$

从而可知$F_\chi(x)$是$\boldsymbol{R}^p$上的非负可测函数，以及

$$\int_{R^p} F_\chi(x)\mathrm{d}x = |I_1|\times|I_2|.$$

这说明$\chi_E\in\mathscr{F}$。

(2) 若E是$\boldsymbol{R}^n$中的开集，

即
$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

其中 I_k 是互不相交的半开闭矩体，则 $\chi_E\in\mathscr{F}$。

事实上，令

$$E_k=\bigcup_{i=1}^{k}I_i,$$

由(1)以及上述引理之(ii)可知 $\chi_{E_k}\in\mathscr{F}$。又根据上述引理之(iv)可知 $\chi_E\in\mathscr{F}$。

(3) 若 E 是有界闭集，则 E 可表示为两个有界开集的差集，从而由(2)以及上述引理之(iii)可知 $\chi_E\in\mathscr{F}$。

(4) 设 $\{E_k\}$ 是递减可测集合列，且 $m(E_1)<\infty$，记

$$E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k.$$

若 $\chi_{E_k}\in\mathscr{F}(k=1,2,\cdots)$，则 $\chi_E\in\mathscr{F}$。

事实上，把 χ_{E_k} 看成 f_k，χ_E 看成 f，那末类似于上述引理之(iv)的证明方法，用控制收敛定理即可得证。

(5) 若 E 是零测集，则 $\chi_E\in\mathscr{F}$。

事实上，此时存在递减开集合列 $\{G_k\}$，$G_k\supset E(k=1,2,\cdots)$，使得

$$\lim_{k\to\infty}m(G_k)=0.$$

令 $H=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$，则由(2)以及(4)可知 $\chi_H\in\mathscr{F}$。又 $E\subset H$，并注意到 $m(H)=0$，我们有

$$\int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q}\chi_H(x,y)\mathrm{d}y=0,$$

以及

$$\int_{R^n}\chi_E(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0=\int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q}\chi_E(x,y)\mathrm{d}y.$$

即 χ_E 满足条件(C)。实际上，上述等式还指出，对几乎处处的 $x\in\boldsymbol{R}^p$，有

$$F_{\chi_E}(x) = \int_{R^p} \chi_E(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

从而立即推出，对几乎处处的 $x \in R^p$，有 $\chi_E(x,y) = 0$ a.e.(于 R^q)。这说明 χ_E 满足条件(A)与(B)，$\chi_E \in \mathscr{F}$。

(6) 若 $E \in \mathscr{M}$，则 $\chi_E \in \mathscr{F}$。

事实上，因为 E 可以表示为两个互不相交的集合的并：

$$E = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \cup Z,$$

其中每个 F_k 都是有界闭集，$m(Z) = 0$。

令
$$K = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

由(3)以及用类似于(2)中的方法不难证明 $\chi_K \in \mathscr{F}$。最后根据等式

$$\chi_E(x,y) = \chi_K(x,y) + \chi_Z(x,y)$$

立即得到 $\chi_E \in \mathscr{F}$。

注意：(i) 在定理4.24的证明中，改变 $x \in R^p$ 与 $y \in R^q$ 的次序结论同样成立。因此，实际上我们可得

$$\int_{R^n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{R^q}\mathrm{d}y\int_{R^p} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(ii)若 $f(x,y)$ 是 E 上的非负可测函数，则可用 $f(x,y)\chi_E(x,y)$ 代替定理5.24中的 $f(x,y)$，我们有

$$\iint_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q} f(x,y)\chi_E(x,y)\mathrm{d}y.$$

定理4.26(可积函数情形的 Fubini 定理) 若 $f \in L(R^n)$，$(x,y) \in R^n = R^p \times R^q$，则

(A) 对于几乎处处的 $x \in R^p$，$f(x,y)$ 是 R^q 上的可积函数。

(B) 积分

$$\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y$$

是 $\boldsymbol{R}^p$ 上的可积函数。

(C) 我们有

$$\int_{R^n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{R^q}\mathrm{d}y\int_{R^p} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

证明 令 $f(x,y)=f^{+}(x,y)-f^{-}(x,y)$，则根据非负可测函数的 Tonelli 定理可知，$f^{+}(x,y)$ 与 $f^{-}(x,y)$ 满足上述条件(A)，(B)与(C)。注意到所有的积分值都是有限的，从而可以作减法运算，并立即得出定理的结论。

注 即使 $f(x,y)$ 的两个累次积分存在且相等，$f(x,y)$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 上也可能是不可积的。

(二) 积分的几何意义

大家知道，积分与测度是相通的，下面我们将通过(一)中的定理来讨论低维欧氏空间中点集与高维欧氏空间中点集之间的测度关系，并给出积分的几何意义。

定理4.27 设 E 是 $\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}^p\times\boldsymbol{R}^q$ 中的可测集，对任意的 $x\in\boldsymbol{R}^p$，令

$$E(x)=\{y\in\boldsymbol{R}^q:(x,y)\in E\},$$

称它为点集 E 在 x 处的截段集，则对几乎处处的 x，$E(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^q$ 中的可测集，$m(E(x))$ 是 $\boldsymbol{R}^p$ 上(几乎处处有定义的)的可测函数且有

$$m(E)=\int_{R^p} m(E(x))\mathrm{d}x.$$

证明 只需在 Tonelli 定理中令 $f=\chi_E$ 便可得证。

定理4.28 若 E_1 与 E_2 是 $\boldsymbol{R}^p$ 与 $\boldsymbol{R}^q$ 中的可测集，则 $E_1\times E_2$ 是 $\boldsymbol{R}^p\times\boldsymbol{R}^q$ 中的可测集，且有

$$m(E_1\times E_2)=m(E_1)\cdot m(E_2).$$

证明 因为

$$\chi_{E_1}(x)\cdot\chi_{E_2}(y)=\chi_{E_1\times E_2}(x,y),$$

所以若能证明 $E_1\times E_2$ 是 $\boldsymbol{R}^p\times\boldsymbol{R}^q$ 中的可测集，则由 Tonelli 定理立即推知

$$\begin{aligned}m(E_1\times E_2)&=\int_{\boldsymbol{R}^p\times\boldsymbol{R}^q}\chi_{E_1\times E_2}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{\boldsymbol{R}^p}\chi_{E_1}(x)\mathrm{d}x\int_{\boldsymbol{R}^q}\chi_{E_2}(y)\mathrm{d}y=m(E_1)\cdot m(E_2).\end{aligned}$$

现在来证明 $E_1\times E_2$ 是 $\boldsymbol{R}^p\times\boldsymbol{R}^q$ 中的可测集。由于 $E_1\times E_2$ 可以表成可数个点集 $A\times B$ 的并集，其中 A,B 是有界闭集或零测集．故只需讨论两种情形：

(i) A 是零测集。此时，对于任给的 $\varepsilon>0$，可作 $\boldsymbol{R}^p$ 中的开矩体列 $\{I_k\}$ 以及 $\boldsymbol{R}^q$ 中开矩体列 $\{J_i\}$，使得

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\supset A,\qquad\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<\varepsilon.$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}J_i\supset B,\qquad\sum_{i=1}^{\infty}|J_i|<\infty.$$

显然，$A\times B$ 被 $\boldsymbol{R}^p\times\boldsymbol{R}^q$ 中的开矩体列 $\{I_k\times J_i\}$ 所覆盖，因此我们有

$$\begin{aligned}m^*(A\times B)&\leqslant m\Big(\bigcup_{k,i=1}^{\infty}(I_k\times J_i)\Big)\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\cdot\sum_{i=1}^{\infty}|J_i|<\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{\infty}|J_i|.\end{aligned}$$

这说明 $A\times B$ 是 $\boldsymbol{R}^p\times\boldsymbol{R}^q$ 中的零测集.

(ii) A 与 B 都是有界闭集。易知 $A\times B$ 是 $\boldsymbol{R}^p\times\boldsymbol{R}^q$ 中的闭集，是可测集。

推论4.29(可测函数图形的测度) 设 $f(x)$ 是 E 上的非负实值可测函数，作点集

$$G_E(f)=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^{n+1}:x\in E,y=f(x)\},$$

称它为 f 在 E 上的图形。(注意，E 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点集，$G_E(f)$ 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的点集。)我们有

$$m(G_E(f)) = 0.$$

证明 不妨设 $m(E)<\infty$。对任给 $\delta>0$，作分点：

$$0,\ \delta,\ 2\delta,\ \cdots,\ k\delta,\ (k+1)\delta,\ \cdots,$$

令 $E_k=\{x: k\delta\leqslant f(x)<(k+1)\delta\}(k=0,1,\cdots)$。显然有

$$G_E(f)=\bigcup_{k=0}^{\infty}G_{E_k}(f).$$

从而得

$$m^*(G_E(f))\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}m^*(G_{E_k}(f))$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\delta\cdot m(E_k)=\delta\cdot m(E).$$

由 δ 的任意性可知

$$m(G_E(f))=0.$$

定理4.30(积分的几何意义) 设 $f(x)$ 是 E 上的非负实值函数，记

$$\underline{G}(f)=\underline{G}_E(f)=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^{n+1}: x\in E, 0\leqslant y\leqslant f(x)\},$$

称它为 f 在 E 上的下方图形集。我们有下述结论：

(i) 若 $f(x)$ 是可测函数，则 $\underline{G}(f)$ 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的可测集，且有

$$m(\underline{G}(f))=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) 若 E 是可测集，$\underline{G}(f)$ 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的可测集，则 $f(x)$ 是可测函数，且有

$$m(\underline{G}(f))=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

这正是 Riemann 积分中曲边梯形面积意义的推广。

证明 (i) 若 $f(x)$ 是一个可测集上的特征函数，结论显然

成立。从而对于非负可测简单函数结论也真(注意，在互不相交子集的并集上的下方图形等于在每个子集上的下方图形的并)。于是，我们作非负可测简单函数的渐升列$\{\varphi_k(x)\}$收敛于$f(x)$，易证

$$\lim_{k\to\infty} G(\varphi_k)\cup Z=G(f),$$

$$Z=\{(x,f(x)):x\in E\}\subset G_E(f).$$

因为f的图形集$G_E(f)$是$\boldsymbol{R}^{n+1}$中的零测集，所以$G(f)$不仅是$\boldsymbol{R}^{n+1}$中的可测集而且还有

$$m(G(f))=\lim_{k\to\infty} m(G(\varphi_k))$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_E\varphi_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) 设$H=G(f)$是$\boldsymbol{R}^{n+1}$中的可测集，由定理4.27可知，对几乎处处的$y\in\boldsymbol{R}^1$，截段集$H(y)$是$\boldsymbol{R}^n$中的可测集，但我们有

$$H(y)=\{x:f(x)\geqslant y\},$$

因此除一零测集中的y值以外，$\{x:f(x)\geqslant y\}$是可测集。这说明$f(x)$是$E\subset\boldsymbol{R}^n$上的可测函数。根据(i)即得

$$m(G(f))=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

(三)* Fubini 定理的应用

设$f(x)$和$g(x)$是$\boldsymbol{R}^n$上的可测函数，若积分

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

存在，则称此积分为f与g的卷积，记为$(f*g)(x)$。

注意，这里的$f(x-y)$是$(x,y)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$上的可测函数。这是因为若令$F(x,y)=f(x)((x,y)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n)$，则由于对$t\in\boldsymbol{R}^1$，有

$$\{(x,y):F(x,y)>t\}=\{(x,y):f(x)>t,\ y\in\boldsymbol{R}^n\},$$

故根据$f(x)$的可测性，$F(x,y)$是$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$上的可测函数。现在作$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$到$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$的非奇异线性变换$T$：

$$\begin{cases} x = \xi - \eta, \\ y = \xi + \eta, \end{cases} \quad (\xi,\eta) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n.$$

显然，在T变换下，F变为$F(\xi-\eta,\xi+\eta)=f(\xi-\eta)$。从而可知$f(\xi-\eta)$是$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$上的可测函数(见推论3.24)。

定理4.31 若$f,g\in L(\boldsymbol{R}^n)$，则$(f*g)(x)$对几乎处处的$x\in\boldsymbol{R}^n$存在，$(f*g)(x)$是$\boldsymbol{R}^n$上的可积函数且有

$$\int_{R^n}|(f*g)(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\left(\int_{R^n}|f(x)|\mathrm{d}x\right)\left(\int_{R^n}|g(x)|\mathrm{d}x\right). \qquad (4.16)$$

证明 首先设$f(x)\geqslant 0$，$g(x)\geqslant 0$，因为$f(x-t)g(t)$是$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$上的可测函数，所以根据非负可测函数的Tonelli定理可得

$$\int_{R^n}\mathrm{d}x\int_{R^n}f(x-t)g(t)\mathrm{d}t=\int_{R^n}\mathrm{d}t\int_{R^n}f(x-t)g(t)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{R^n}g(t)\,\mathrm{d}t\int_{R^n}f(x-t)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{R^n}g(t)\,\mathrm{d}t\int_{R^n}f(x)\mathrm{d}x<\infty.$$

这说明$(f*g)(x)$几乎处处存在(有限)，且有

$$\int_{R^n}(f*g)(x)\mathrm{d}x=\int_{R^n}g(t)\mathrm{d}t\cdot\int_{R^n}f(x)\mathrm{d}x.$$

其次，对于一般情形，只需注意$|(f*g)(x)|\leqslant(|f|*|g|)(x)$，从而有

$$\int_{R^n}|(f*g)(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{R^n}(|f|*|g|)(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{R^n}|f(x)|\mathrm{d}x\int_{R^n}|g(x)|\mathrm{d}x<\infty.$$

定理4.32* 设$f(x)$是E上的可测函数，对任意的$\lambda>0$，

作点集$\{x\in E:|f(x)|>\lambda\}$，它是可测集，我们称

$$f_*(\lambda)=m(\{x\in E:|f(x)|>\lambda\})$$

为 f 的分布函数（显然 $f_*(\lambda)$ 是 $(0,\infty)$ 上的单调下降函数）。我们有 $(1\leqslant p<\infty)$

$$\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x=p\int_0^\infty\lambda^{p-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda. \qquad (4.17)$$

证明 作函数

$$F(\lambda,x)=\begin{cases}1, & |f(x)|>\lambda,\\ 0, & |f(x)|\leqslant\lambda.\end{cases}$$

易知 $F(\lambda,x)$ 作为 x 的函数是$\{x\in E:|f(x)|>\lambda\}$ 上的特征函数。从而由 Tonelli 定理可得

$$\begin{aligned}\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x&=\int_E\mathrm{d}x\int_0^{|f(x)|}p\lambda^{p-1}\mathrm{d}\lambda\\&=\int_E\mathrm{d}x\int_0^\infty p\lambda^{p-1}F(\lambda,x)\mathrm{d}\lambda\\&=\int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mathrm{d}\lambda\int_E F(\lambda,x)\,\mathrm{d}x\\&=p\int_0^\infty\lambda^{p-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

附　注

（一）下面讨论关于复值函数的积分，首先给出定义：

定义 若 $\varphi(x),\psi(x)$ 是 E 上的实值可测函数，则称 $f(x)=\varphi(x)+i\psi(x)$ 为 E 上的复值可测函数，若

$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}x<\infty,$$

则称 $f(x)$ 是 E 上可积函数，且定义其积分值为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x+i\int_E\psi(x)\mathrm{d}x.$$

显然，对于E上的两个可积函数$f(x)$与$g(x)$，必有

$$\int_E [\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x$$

$$=\alpha\int_E f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_E g(x)\mathrm{d}x,$$

其中α与β是复数。对于复值可积函数，仍有下述性质：

定理 若$f(x)$是E上的复值可积函数，则

$$\left|\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

证明 记

$$z=\int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

则存在复数$\alpha:|\alpha|=1$，且$\alpha z=|z|$。显然有

$$\mathrm{Re}[\alpha f(x)]\leqslant|\alpha f(x)|=|f(x)|,$$

从而得

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|=\alpha\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E \alpha f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_E \mathrm{Re}[\alpha f(x)]\mathrm{d}x\leqslant\int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

（二）积分号下取极限的充分必要条件。在Lebesgue控制收敛定理中，函数列有控制函数存在是积分号下取极限的充分条件。在这里，简单介绍一下充分必要条件。

首先我们看到，若$f\in L(E)$，则对任意的$\varepsilon>0$，存在非负函数$g\in L(E)$，使得

$$\int_{\{x\in E:|f(x)|>g(x)\}}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

（只需令$g(x)=2|f(x)|$。）反之亦然。

定义 设$f_k\in L(E)(k=1,2,\cdots)$。若对任意的$\varepsilon>0$，存在非负函数$g\in L(E)$，使得

$$\int_{\{x\in E:|f_k(x)|\geq g(x)\}} |f_k(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon, \qquad k=1,2,\cdots,$$

则称$\{f_k\}$是E上的一致（或等度）可积函数列。

显然，若$|f_k(x)|\leqslant F(x)$且$F\in L(E)$，则$\{f_k\}$是E上的一致可积函数列。易证$\{f_k\}$是E上的一致可积函数列的充要条件是：

(i) $\sup\limits_{k>1}\left\{\int_E |f_k(x)|\,\mathrm{d}x\right\}<\infty$；

(ii) 对任意的$\varepsilon>0$，存在非负函数$h\in L^1(E)$以及$\delta>0$，使得对于满足

$$\int_e h(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\delta$$

的可测集e，必有

$$\int_e |f_k(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon, \qquad k=1,2,\cdots.$$

定理 设$\{f_k(x)\}$是E上的可测函数列，且几乎处处收敛于实值函数$f(x)$，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0$$

的充分必要条件是：$\{f_k(x)\}$是E上的一致可积函数列。

习　题

1．设$f(x)$是$E\subset \boldsymbol{R}^n$上几乎处处大于零的可测函数，且满足$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=0$，试证明$m(E)=0$。

2．设$f\in L(\boldsymbol{R}^1)$，$f(0)=0$且$f'(0)$存在，试证明下述积分存在：

$$\int_{\boldsymbol{R}^1}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

3．设$\int_0^{2\pi}|f(x)|\log(1+|f(x)|)\,\mathrm{d}x<\infty$。证明$f\in L((0,2\pi))$。

4. 设$f(x)$是$[0,1]$上的递增函数，试证明对$E\subset[0,1]$：$m(E)=t$，有$\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x$。

5. 设$f\in L((0,1))$，若对任意的支集在$(0,1)$中的函数$g\in C^\infty((0,1))$，有$\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x=0$。试证明

$$f(x)=c,\quad \text{a.e.}\ x\in(0,1).$$

6. 设$f(x)$是E上的非负可积函数。令

$$E_k=\{x\in E: f(x)\geqslant k\},\quad k=1,2,\cdots,$$

试证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)<\infty.$$

7. 设$f(x)$是E上的非负可测函数且$m(E)<\infty$，试证明$f(x)$是E上的可积函数的充分必要条件是：级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k m(\{x\in E: f(x)\geqslant 2^k\})$$

收敛。

8. 设$f(x)$是$[a,b]$上的正值可积函数。令$0<q\leqslant b-a$，记$\Gamma=\{E\subset[a,b]: m(E)\geqslant q\}$，试证明

$$\inf_{E\in\Gamma}\left\{\int_E f(x)\mathrm{d}x\right\}>0.$$

9. 设$\{f_k(x)\}$是E上的非负可测函数列，且$m(E)<\infty$，试证明$\{f_k(x)\}$依测度收敛于零（函数）的充分必要条件是：

$$\lim_{k\to\infty}\int_E \frac{f_k(x)}{1+f_k(x)}\mathrm{d}x=0.$$

10. 设$\{f_k(x)\}$是E上的非负可测函数列，且有

$$f_k(x)\geqslant f_{k+1}(x)\ (k=1,2,\cdots),\quad \lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x),$$

又存在k_0，使得$\int_E f_{k_0}(x)\mathrm{d}x<\infty$，试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

11. 设$f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$是$E$上的非负可积函数，且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x),\quad \text{a.e.};\qquad \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

试证明对于E中任一可测子集e，有

$$\lim_{k\to\infty}\int_e f_k(x)\mathrm{d}x=\int_e f(x)\mathrm{d}x.$$

12. 设$f\in L(\mathbf{R}^n)$，$f_k\in L(\mathbf{R}^n)$ $(k=1,2,\cdots)$，且对于任一可测集$E\subset\mathbf{R}^n$，有

$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f_{k+1}(x)\mathrm{d}x,\qquad k=1,2,\cdots,$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x),\qquad \text{a.e.}.$$

13. 求积分

(i) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{1-x}\mathrm{d}x$；　　(ii) $\displaystyle\int_0^1\log\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$.

14. 设$f\in L(\mathbf{R}^1)$，$a>0$，试证明级数$F(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}f\left(\frac{x}{a}+n\right)$在$\mathbf{R}^1$上几乎处处绝对收敛，且$F(x)$是以$a$为周期的周期函数，$F\in L([0,a])$.

15. 设$\{f_n(x)\}$是$I=[0,1]$上的可测函数列，且存在实数列$\{t_n\}$，使得$\sum_n|t_n|=+\infty$，$\sum_n t_nf_n(x)$在I上几乎处处绝对收

敛，试证明存在$\{n_k\}$，使得$f_{n_k}(x)$在I上几乎处处收敛于零。

•16. 假设有定义在R^n上的函数$f(x)$，如果对于任意的$\varepsilon>0$，存在$g,h\in L(R^n)$，满足$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)(x\in R^n)$，并且使得$\int_{R^n}[h(x)-g(x)]\mathrm{d}x<\varepsilon$，试证明$f\in L(R^n)$。

17. 设$\{E_k\}$是测度有限的可测集列，且有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{R^n}|\chi_{E_k}(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0,$$

试证明存在可测集E，使得$f(x)=\chi_E(x)$，　a.e.$x\in R^n$。

18. 设$f_k(x)$是E上非负可积函数列，且有$f\in L(E)$，使得$f_k(x)$在E上依测度收敛于$f(x)$。若

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

19*. 设$f\in L(R^1)$，$F(x)$满足

$$F(0)=0,\quad |F(x)-F(y)|\leqslant|x-y|,\quad x,y\in R^1,$$

试证明$F(f)\in L(R^1)$。

•20. 设$f\in L(R^1)$，$a>0$，试证明

$$\lim_{n\to\infty}n^{-a}f(nx)=0,\ \text{a.e.}x\in R^1.$$

21. 设$f(x)$是E上非负可测函数，且对任给$\varepsilon>0$，有E中可测子集E_ε，使得

$$m(E\setminus E_\varepsilon)<\varepsilon,\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{E_\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x\text{存在},$$

试证明$f\in L(E)$。

22. 设$f\in L(E)$，且有$\int_E f(x)\mathrm{d}x=r>0$，试证明$E$中存在可测子集$e$，使得

$$\int_e f(x)\mathrm{d}x = \frac{r}{3}.$$

23. 设 $f \in L([a,b])$，$\{I_k\}$是$[a,b]$中的子区间列。若存在$\lambda > 0$，使得$\int_{I_k} |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \lambda |I_k|$ $(k=1,2,\cdots)$，试证明

$$\int_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k} |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \lambda m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right).$$

24*. 设$f \in L((0,\infty))$，$[a_\lambda, b_\lambda]$是$(0,\infty)$ 中与正数λ 有关的区间，试证明

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{a_\lambda}^{b_\lambda} f(t)\cos\lambda t\ \mathrm{d}t = 0.$$

25. 设 $\{f_k(x)\}$，$\{g_k(x)\}$ 是E上的两个可测函数列，且有$|f_k(x)| \leqslant g_k(x)$，$x \in E$。若

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad \lim_{k\to\infty} g_k(x) = g(x),$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_E g_k(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x < \infty,$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

26. 试用依测度收敛代替几乎处处收敛证明 Lebesgue 控制收敛定理。

27. 设$x^s f(x)$，$x^t f(x)$在 $(0,\infty)$ 上可积，其中 $s<t$，试证积分

$$\int_0^\infty x^u f(x)\mathrm{d}x, \qquad u \in (s,t)$$

存在且是 $u \in (s,t)$ 的连续函数。

28. 设$f(x)$是$(0,1)$ 上的非负可测函数，若存在常数 c 使得

$$\int_0^1 [f(x)]^n \mathrm{d}x = c, \qquad n = 1,2,\cdots,$$

试证明存在可测集 $E \subset (0,1)$，使得

$$f(x) = \chi_E(x), \qquad \text{a.e.}\, x \in [a,b].$$

29. 设 $f \in L(\mathbf{R}^1)$，试证明

$$\int_a^b f(x+t)\mathrm{d}x = \int_{a+t}^{b+t} f(x)\mathrm{d}x.$$

30. 设 $f \in L(\mathbf{R}^1)$，若对 $\mathbf{R}^1$ 上任意的具有紧支集的连续函数 $g(x)$，有 $\int_{\mathbf{R}^1} f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$，试证明 $f(x) = 0$, $\quad$ a.e. $x \in \mathbf{R}^1$.

31. 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，试证明 $|f^2(x)|$ 在 E 上可积的充分必要条件是：

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, m(\{x \in E : |f(x)| > k\}) < \infty.$$

32. 设 $f(x,y)$ 定义在 $\mathbf{R}^2$ 上，对固定的 $x \in \mathbf{R}^1$ $(y \in \mathbf{R}^1)$，$f(x,y)$ 是 $y \in \mathbf{R}^1$ $(x \in \mathbf{R}^1)$ 的连续函数，试证明存在 $g_n \in C(\mathbf{R}^2)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

33*. 设 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的有界可测的周期函数，周期为 T，试证明对 $f \in L(\mathbf{R}^1)$，有

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_{\mathbf{R}^1} f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbf{R}^1} f(x)\mathrm{d}x\right).$$

34*. 设有实数列 $\{a_n\}$，并令

$$E = \{x \in \mathbf{R}^1 : \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{i a_n x} \text{存在}\}.$$

若 $m(E) > 0$，试证明 $\{a_n\}$ 是收敛列。

35. 设 $f \in L(\mathbf{R}^1)$，且令

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\mathrm{d}t, \qquad x, y \in \mathbf{R}^1.$$

若 $F(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的单调上升函数，试证明 $f(x) \geqslant 0$, $\quad$ a.e. $x \in \mathbf{R}^1$.

36. 设 $E_k\subset[a,b]$且 $m(E_k)\geqslant\delta>0$ $(k=1,2,\cdots)$，$\{a_k\}$是一实数列且满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\chi_{E_k}(x)<\infty,\quad \text{a.e.}\,x\in[a,b],$$

试证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|<\infty.$$

37*. 设有自然数子列 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，且令

$$E=\{x\in[0,2\pi]:\{\sin n_k x\}\text{是收敛列}\},$$

试证明 $m(E)=0$。

38. 设 $f(x),g(x)$是 $[a,b]$上 Riemann 可积的函数，且在 $[a,b]$的一个稠密子集上其值相等，试证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

39. 设 $f(x)$是$[a,b]$上的有界函数，其不连续点集记为D。若D只有可列个极限点，试证明 $f(x)$是$[a,b]$上的 Riemann 可积函数。

40. 设 $f(x)$ 是 R^1上的有界函数，若对于每一点 $x\in R^1$，极限

$$\lim_{h\to 0}f(x+h)$$

存在，试证明 $f(x)$在任一区间$[a,b]$上是 Riemann 可积的。

41. 设F是$[0,1]$中的闭集且 $m(F)=0$。试问 $\chi_F(x)$在$[0,1]$上是 Riemann 可积的吗？

42. 设$f(x,y)$在$[0,1]\times[0,1]$上可积，试证明

$$\int_0^1\left[\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

43. 假设 $f(x),g(x)$ 是E上的可测函数并且 $m(E)<\infty$。若 $f(x)+g(y)$在 $E\times E$ 上可积，试证明 $f(x),g(x)$ 都是E上的可积

函数。

*44. 设

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty, \qquad \int_1^\infty |f(x)|\,x^{-2}\mathrm{d}x<\infty,$$

试证明

$$\int_0^\infty \sin ax\,\mathrm{d}x\int_0^\infty f(y)\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y = a\int_0^\infty \frac{f(y)}{a^2+y^2}\mathrm{d}y.$$

45. 求下列积分：

(i) $\displaystyle\int\limits_{x>0,y>0}\int \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)}$； (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

46. 设非负函数 $f\in L((0,\infty))$，令

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \qquad x>0.$$

试证明 $F\overline{\in} L((0,\infty))$.

47. (i) 设 $f(x),g(x)$ 是 E 上可测函数，且 $R(f)\subset[c,d]$，$g(x)\geqslant 0,\int_E g(x)\mathrm{d}x=1$，$\varphi(x)$ 是 $[c,d]$ 上的凸函数，试证明（Jensen）不等式

$$\varphi\left(\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\int_E \varphi[f(x)]g(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) 设 $f(x),g(x)$ 是 E 上非负可测函数，若 $f(x)\cdot g(x)\geqslant 1$，$x\in E$，试证明

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_E g(x)\mathrm{d}x\geqslant 1.$$

48*. 设 $f,g\in L(R^1)$，且满足

$$\int_{R^1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{R^1} g(x)\mathrm{d}x=1.$$

试证明对 $\lambda\in(0,1)$，存在 $E\subset R^1$，使得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x = \lambda.$$

49. 试证明不存在 $g \in L(\boldsymbol{R}^n)$，使得对任意的 $f \in L(\boldsymbol{R}^n)$，都有

$$(g * f)(x) = f(x), \qquad \text{a.e. } x \in \boldsymbol{R}^n.$$

50*. 设 E 是 $\boldsymbol{R}^1$ 中的正测集，而且满足 $\frac{1}{2}(x+y) \in E(x, y \in E)$，试证明 E 包含一个非空开集。

51. 设 $f(x)$，$g(x)$ 是 E 上的非负可测函数，且 $f \cdot g \in L(E)$。令 $E_y = \{x \in E : g(x) \geqslant y\}$，试证明

$$F(y) = \int_{E_y} f(x)\mathrm{d}x$$

对一切 $y > 0$ 均存在，且有 $\int_0^\infty F(y)\mathrm{d}y = \int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x$。

52. 设 $f(x)$ 是 E 上的有界可测函数，且存在正数 M 及 $\alpha < 1$，使得对于任意的 $\lambda > 0$，有

$$m(\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}) < \frac{M}{\lambda^\alpha},$$

试证明 $f \in L(E)$。

53. 设 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的任一个具有有限测度的可测集上都是可积的，试证明 f 可分解为两部分：$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$，其中 $\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，$f_2(x)$ 在 $\boldsymbol{R}^n \setminus Z$ 上是有界函数，其中 $m(Z) = 0$。

54*. 设有界的非负函数 $f(x)$ 具有可任意小的周期，试证明 $(x) = \lambda$，a.e. $x \in \boldsymbol{R}^1$，其中 λ 是常数。

55. 设 $E \subset [0,1]$，试证明 $\chi_E(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积当且仅当 $m(\bar{E} \setminus \mathring{E}) = 0$。

56. 设 A, B 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的可测集，试证明

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} m((A - \{x\}) \cap B)\mathrm{d}x = m(A) \cdot m(B).$$

第五章　微分与不定积分

在数学分析课程的学习中，我们知道积分与微分运算的互逆关系乃是微积分学的中枢，它们主要表现于下述微积分基本定理之中：

(I) 若 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数且在 $x=x_0$ 处连续，则函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \quad x\in[a,b]$$

在 $x=x_0$ 处是可微的，且有 $F'(x_0)=f(x_0)$。

(II) 若 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的可微函数，$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积函数，则 $f(x)$ 是其导函数的不定积分：

$$\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x=f(x)-f(a), \quad x\in[a,b].$$

本章主要目的是要在 Lebesgue 积分理论中推广这一结果。为简单起见，我们着重介绍 $\boldsymbol{R}^1$ 的情形。

在这里我们首先遇到的是函数的可微性问题。由于可积函数 $f(x)$ 的不定积分可以写成以下的形式：

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_a^x f^+(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f^-(t)\mathrm{d}t,$$

即 $F(x)$ 实际上是两个单调上升函数的差，从而讨论单调函数的可微性问题可以作为 (I) 的先导。其次我们引进“有界变差函数”的概念，它实际上就是两个单调上升函数的差，从而可知不定积分的全体是有界变差函数类中的一个子类，而且它是一个真子类。这就是在 § 5.4 中引入的绝对连续函数类。从而导出 (II) 型基本定理。最后，对 $\boldsymbol{R}^n$ 的情形作一简单介绍。



§5.1 单调函数的可微性

在点集测度理论的基础上，我们可以建立各种形式的集合覆盖定理，它们为深入研究函数的可微性提供了恰当的方法。本节将介绍在 Vitali 意义下的覆盖定理，并由此证明 Lebesgue 的著名结论：单调函数是几乎处处可微的。

（一）Vitali *覆盖定理*

定义 5.1 设 $E\subset \mathbf{R}^1$, $\Gamma=\{I_\alpha\}$ 是一个区间族。若对任意的 $x\in E$ 以及 $\varepsilon>0$，存在 $I_\alpha\in\Gamma$，使得 $x\in I_\alpha$, $|I_\alpha|<\varepsilon$，则称 Γ 是 E 在 Vitali 意义下的一个覆盖，简称为 E 的 Vitali 覆盖。

例 设 $E=[a,b]$，令 $\{r_n\}$ 为 $[a,b]$ 中的全体有理数，

$$I_{n,m}=\left[r_n-\frac{1}{m},r_n+\frac{1}{m}\right],$$

则区间族 $\Gamma=\{I_{n,m}:n,m=1,2,\cdots\}$ 是 E 的 Vitali 覆盖。

定理 5.1（Vitali 覆盖定理） 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 且 $m^*(E)<\infty$。若 Γ 是 E 的 Vitali 覆盖，则对于任意的 $\varepsilon>0$，存在有限个互不相交的 $I_j\in\Gamma(j=1,2,\cdots,n)$，使得

$$m^*\left(E\Big\backslash\bigcup_{j=1}^{n}I_j\right)<\varepsilon. \tag{5.1}$$

证明 不失一般性，只需讨论 Γ 是闭区间族的情形。作开集 G，使得 $G\supset E$ 且 $m(G)<\infty$。因为 Γ 是 E 的 Vitali 覆盖，所以不妨假定 Γ 中的每个 I 均含于 G。

首先从 Γ 中任选一区间记作 I_1，然后再用数学归纳法逐步挑选后继区间：设已选出互不相交的区间 $I_1,I_2,\cdots,I_k$，若

$$E\subset\bigcup_{j=1}^{k}I_j,$$

则定理无需再证。否则令

$$\delta_k=\sup\{|I|:I\in\Gamma,\quad I\cap I_j=\varnothing\quad(j=1,2,\cdots,k)\}.$$

显然，$\delta_k\leqslant m(G)<\infty$。此时，我们一定可以从 Γ 中选出一个区间记为 I_{k+1}，满足

$$|I_{k+1}| > \frac{1}{2}\delta_k, \quad I_{k+1}\cap I_j = \varnothing, \quad j = 1,2,\cdots,k.$$

继续这一过程，可得互不相交的闭区间列 $\{I_j\}$ 且满足

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \leqslant m(G) < \infty.$$

由此可知，对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 n 使得

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |I_j| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

令

$$S = E\Big\backslash \bigcup_{j=1}^{n} I_j.$$

现在来证明$m^*(S) < \varepsilon$。设 $x\in S$，因为$\bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$ 是闭集且 $x\bar{\in}\bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$，所以存在 $I\in \Gamma$，使得

$$x\in I, \quad I\cap I_j = \varnothing, \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

显然，$|I| \leqslant \delta_n < 2|I_{n+1}|$。由于当 $j\to\infty$时，有 $|I_j|\to 0$，故知 I 必与 $\{I_j\}$ 中某一区间相交（否则因区间 I 的长度是确定的而与选取过程发生矛盾）。记 n_0 是 $\{I_j\}$中与 I 相交之区间的最小下标，则 $n_0 > n$ 且

$$|I| \leqslant \delta_{n_0-1} < 2|I_{n_0}|.$$

因为 $x\in I$ 且 $I\cap I_{n_0} \neq \varnothing$，所以 x 与区间 I_{n_0} 的中点的距离不超过

$$|I| + \frac{1}{2}|I_{n_0}| \leqslant \frac{5}{2}|I_{n_0}|.$$

从而我们作区间 I'_{n_0}，它与 I_{n_0} 同心且长度为 I_{n_0} 的 5 倍，就可使 I'_{n_0} 包含 x。如果对一切 $j > n$ 的 I_j 都作相应的 I'_j，那末得到

$$S\subset \bigcup_{j=n+1}^{\infty} I'_j.$$

由此知

$$m^*(S) \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} |I'_j| = 5 \sum_{j=n+1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon.$$

（二）单调函数的可微性

大家知道，如果一个定义在 R^1 上的函数在某一点是可微的，那末它在该点一定是连续的，但反之不然。不仅如此，我们还不难构造一个函数，它在 (a,b) 上处处连续，但在 (a,b) 中的一个可列集上不存在导数。十九世纪初期，许多数学家都以为连续函数在其定义域中的"广大"部分点集上导数存在，并且还有人试图严格地去证明这一点，但是沒有成功。一个震惊数学界的反例是德国数学家 Weierstrass(1815—1897) 于1872年给出的(首次发表于1875年)。这个例子说明，处处连续的函数可以处处不可微①。

然而，单调函数的情况就不同。虽然我们无法对定义在 $[a,b]$ 上的一般单调函数断定在哪些点上是可微的，但对可微性的整体描述，我们有著名的Lebesgue定理：单调函数是几乎处处可微的②。

---

① Weierstrass 作函数如下：

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \quad x \in R^1.$$

其中 a 是奇数，$0<b<1$. 他指出：$W(x)$ 在 R^1 上处处连续，且在 $ab>1+3/2$ 时，$W(x)$ 在 R^1 上处处不可微。

在现代，可以利用下述关于三角级数的一个结论来构造连续不可微函数的例子。

"设 $r_k \geqslant 0 (k=1,2,\cdots)$，$\sum_{k=1}^{\infty} r_k < \infty$。令

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos n_k x.$$

其中 $\{n_k\}$ 满足 $\inf\{n_{k+1}/n_k : k \geqslant 1\} > 1$（即 Hadamard 数列），若 $f(x)$ 在某一点可微，则 $n_k r_k \to 0 (k \to \infty)$。"

② 关于函数的可微性与单调性，Katznelson 与 Stromberg 指出（1974年美国数学月刊），存在 R^1 上的可微函数 $f(x)$，它在任一区间上均非单调函数且 $|f'(x)| \leqslant 1$，$f'(x)$ 还不是 Riemann 可积的。

为此，我们先要把导数的概念适当地加以推广，以便于统一处理导数可能不存在的情形。

定义5.2 设 $f(x)$ 是定义在 $\boldsymbol{R}^1$ 中点 x_0 的一个邻域上的实值函数，令

$$D^+f(x_0)=\overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$D_+f(x_0)=\underline{\lim_{h\to 0+}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$D^-f(x_0)=\overline{\lim_{h\to 0-}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$D_-f(x_0)=\underline{\lim_{h\to 0-}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

分别称它们为 $f(x)$ 在 x_0 点的右上导数，右下导数，左上导数，左下导数。总称为 Dini(导)数。

显然，$D^+f(x_0)\geqslant D_+f(x_0)$，　$D^-f(x_0)\geqslant D_-f(x_0)$，

$$D^+(-f)=-D_+(f),D^-(-f)=-D_-(f).$$

此外，若此四个 Dini 数皆等于同一个有限值，则 $f(x)$ 在 x_0 点是可微的；若 $D^+f(x_0)=D_+f(x_0)$ 为有限值，则 $f(x)$ 在 x_0 点的右导数存在；若 $D^-f(x_0)=D_-f(x_0)$ 为有限值，则 $f(x)$ 在 x_0 点的左导数存在。

例 设 $a<b$，$a'<b'$，作函数：

$$f(x)=\begin{cases} ax\sin^2\dfrac{1}{x}+bx\cos^2\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ a'x\sin^2\dfrac{1}{x}+b'x\cos^2\dfrac{1}{x}, & x<0. \end{cases}$$

由于在区间

$$\frac{1}{(2n+2)\pi}<x\leqslant\frac{1}{2n\pi}$$

中，$\cos(1/x)$ 及 $\sin(1/x)$ 可取到 -1 到 $+1$ 之间的一切值，故

$$D^+f(0)=\sup_\theta(a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)=b.$$

类似地，有 $D_+f(0)=a$，$D_-f(0)=a'$，$D^-f(0)=b'$。

定理5.2(Lebesgue定理) 若 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的单调上升(实值)函数，则 $f(x)$的不可微点集为零测集且有

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)-f(a). \tag{5.2}$$

证明 我们首先证明，对于(a,b)中几乎处处的 x 有

$$D_-f(x)=D^-f(x)=D_+f(x)=D^+f(x).$$

为此，只需证明下述两个点集

$$E_1=\{x:D^+f(x)>D_-f(x)\},\qquad E_2=\{x:D^-f(x)>D_+f(x)\}$$

为零测集即可。对于 E_1 与 E_2，只需证明 $m(E_1)=0$，因为通过变换 $-f$ 并注意到 $D^+(-f)=-D_+(f)$和 $D^-(-f)=-D_-(f)$，$m(E_2)=0$ 就可直接由前者推出。记 Q_+ 为正有理数集，并对 E_1 作分解如下：

$$E_1=\bigcup_{r,s\in Q_+}\{x:D^+f(x)>r>s>D_-f(x)\}.$$

若记 $A=A_{r,s}=\{x:D^+f(x)>r>s>D_-f(x)\}$，则 $m(E_1)=0$的证明归结为证明 $m(A)=0$。

作开集$G\supset A$，使得 $m(G)<(1+\varepsilon)m^*(A)$。对于任一点 $x\in A$，由于 $D_-f(x)<s$，故存在 $h>0$，使得

$$\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}<s, \tag{5.3}$$

其中的 h 可以取得充分小，并不妨假定$[x-h,x]\subset G$，显然如此之区间$[x-h,x]$的全体就构成一个 A的 Vitali 覆盖。根据 Vitali 定理可知，对任给的$\varepsilon>0$，存在互不相交的区间组

$$[x_1-h_1,x_1],\ [x_2-h_2,x_2],\ \cdots,\ [x_p-h_p,x_p],$$

使得

$$m^*\left(A\cap\bigcup_{j=1}^{p}[x_j-h_j,x_j]\right)>m^*(A)-\varepsilon, \tag{5.4}$$

$$\sum_{j=1}^{p} h_j < (1+\varepsilon) m^*(A). \tag{5.5}$$

因为每个$(x_j - h_j, x_j)$均满足(5.3)，所以我们有

$$f(x_j) - f(x_j - h_j) < s h_j, \quad j = 1, 2, \cdots, p.$$

再考虑到(5.5)式即得

$$\sum_{j=1}^{p} [f(x_j) - f(x_j - h_j)] < s(1+\varepsilon) m^*(A). \tag{5.6}$$

又记

$$B = A \cap \bigcup_{j=1}^{p} (x_j - h_j, x_j).$$

因为对于任意的 $y \in B$，$D^+ f(y) > r$，所以存在 $k > 0$，使得 $[y, y+k]$含于某个$(x_j - h_j, x_j)$内，且有

$$\frac{f(y+k) - f(y)}{k} > r, \tag{5.7}$$

其中 k 可以取得充分小。从而如此之区间$[y, y+k]$的全体就构成 B 的 Vitali 覆盖。再应用 Vitali 定理的结论，可知存在互不相交区间组

$$[y_1, y_1 + k_1], \ [y_2, y_2 + k_2], \ \cdots, \ [y_q, y_q + k_q],$$

使得

$$\sum_{i=1}^{q} k_i > m^*(B) - \varepsilon.$$

由于每个$(y_i, y_i + k_i)$均满足(5.7)式，故知

$$f(y_i + k_i) - f(y_i) > r k_i.$$

从而根据(5.4)式可得

$$\sum_{i=1}^{q} [f(y_i + k_i) - f(y_i)] > r(m^*(A) - 2\varepsilon). \tag{5.8}$$

注意到 $f(x)$是单调上升函数以及 $[y_i, y_i + k_i]$ 含于某个 $(x_j - h_j, x_j)$内，可知

$$\sum_{i=1}^{q}[f(y_i+k_i)-f(y_i)]\leqslant\sum_{j=1}^{p}[f(x_j)-f(x_j-h_j)].$$

于是引用(5.8)与(5.6)式，我们得到

$$r(m^*(A)-2\varepsilon)<s(1+\varepsilon)m^*(A).$$

由 ε 的任意性上式变为 $rm^*(A)\leqslant sm^*(A)$。这说明 $m^*(A)=0$，否则与 $r>s$ 矛盾。

其次我们来证明(5.2)式。由上所述，$f'(x)$在$[a,b]$上是几乎处处有定义的。根据$f(x)$的单调上升性质，可知$f'(x)\geqslant 0$ a.e.。现在令

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right],\qquad x\in[a,b],$$

其中认定当 $x>b$ 时，有 $f(x)=f(b)$。易知

$$f_n(x)\geqslant 0,\qquad \lim_{n\to\infty}f_n(x)=f'(x)\quad \text{a.e.}$$

于是由 Fatou 引理可得

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x&\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}n\int_a^b\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]\mathrm{d}x\\&=\underline{\lim}_{n\to\infty}\left[n\int_b^{b+\frac{1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x-n\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\&=\underline{\lim}_{n\to\infty}\left[f(b)-n\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\&\leqslant f(b)-f(a).\end{aligned}$$

从而(5.2)式成立。由此立即可知$f'(x)$是几乎处处有限的，即$f(x)$是几乎处处可微的。

下例表明，单调函数是几乎处处可微的这一结论，一般说来是不能改进的。

例 设$E\subset(a,b)$且$m(E)=0$，我们可以作一个在$[a,b]$上是

连续且单调上升的函数 $f(x)$，使得 $f'(x)=\infty$，$x\in E$。

事实上，对每一个自然数 n，我们可以取一个包含 E 的有界开集 G_n，使得 $m(G_n)<1/2^n$、作函数列

$$f_n(x)=m([a,x]\cap G_n),\quad x\in[a,b],\quad n=1,2,\cdots.$$

显然，$f_n(x)$ 是非负的单调上升函数且 $f_n(x)<1/2^n$。由于

$$f_n(x+h)-f_n(x)\leqslant|h|,\quad |h|\text{充分小},$$

故知 $f_n(x)$ 是连续函数。现在再作函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x),\quad x\in[a,b].$$

它是非负连续且单调上升的函数。若 $x\in E$，则对于任意指定的自然数 k，可取 $|h|$ 充分小，使得

$$[x,x+h]\subset G_n,\quad n=1,2,\cdots,k,$$

并保证 $[x,x+h]\subset(a,b)$。此时有

$$\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}=1,\quad n=1,2,\cdots,k.$$

从而得

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant\sum_{n=1}^{k}\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}=k.$$

这说明当 $x\in E$ 时，$f'(x)=\infty$。

§5.2 有界变差函数

定义5.3 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实值函数，作分划 Δ：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 以及相应的和

$$v_\Delta=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|.$$

令

$$\bigvee_a^b(f)=\sup\{v_\Delta:\Delta\text{ 为}[a,b]\text{的任一分划}\},$$

并称它为 f 在 $[a,b]$ 上的全变差。若

$$\bigvee_a^b(f)<\infty,$$

则称 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数。其全体记为 $BV([a,b])$。

例 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调实值函数，则对任一分划 Δ，都有 $v_\Delta=|f(b)-f(a)|$，从而可知

$$\bigvee_a^b(f)=|f(b)-f(a)|<+\infty.$$

即 $f\in BV([a,b])$。

例 若 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的可微函数且 $|f'(x)|\leqslant M$，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数。

证明 对于任一分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，由微分中值定理可知

$$v_\Delta=\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant\sum_{i=1}^n M(x_i-x_{i-1})=M(b-a).$$

从而得到

$$\bigvee_a^b(f)\leqslant M(b-a)<\infty.$$

例 若在 $[0,1]$ 上定义函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{\pi}{x}, & 1\geqslant x>0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 不是有界变差函数。事实上，作分划

$$\Delta: 0<\frac{2}{2n-1}<\frac{2}{2n-3}<\cdots<\frac{2}{3}<1,$$

则

$$v_\Delta=\frac{2}{2n-1}+\left(\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n-3}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}.$$

从而可知当 $n\to\infty$时，$v_\Delta\to\infty$。即$\bigvee_a^b(f)=\infty$。

由定义我们立即可得下述简单事实：

(i) 设 $f\in BV([a,b])$，则 $f(x)$在$[a,b]$上是有界函数；

(ii) $BV([a,b])$构成一个线性空间。

定理5.3 若 $f(x)$是$[a,b]$上的实值函数，$a<c<b$，则

$$\bigvee_a^b(f)=\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f). \tag{5.9}$$

证明 不妨设$\bigvee_a^c(f)$与$\bigvee_c^b(f)$都是有限的。考虑$[a,b]$的一个分划 Δ，若 c 是分点：$a=x_0<x_1<\cdots<x_r=c<\cdots<x_n=b$，则

$$v_\Delta=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

$$=\sum_{i=1}^{r}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\sum_{i=r+1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

$$\leqslant\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f).$$

若 c 不是分划 Δ 的分点，将 c 当作分点插入分划 Δ，并记新分划为 Δ'，显然有 $v_\Delta\leqslant v_{\Delta'}$。由此可知

$$\bigvee_a^b(f)\leqslant\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f).$$

另一方面，对于任意的 $\varepsilon>0$，必存在$[a,c]$的分划 Δ'：$a=x'_0<x'_1<\cdots<x'_m=c$，使得

$$\sum_{i=1}^{m}|f(x'_i)-f(x'_{i-1})|>\bigvee_a^c(f)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

同样，也存在$[c,b]$的分划 $\Delta: c = x''_0 < x''_1 < \cdots < x''_n = b$，使得

$$\sum_{j=1}^{n} |f(x''_j) - f(x''_{j-1})| > \bigvee_c^b (f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

现在记 $\Delta' \cup \Delta''$ 为 Δ' 与 Δ'' 中分点合并而成的$[a,b]$的分划，且合并后的分点用$\{x_k\}$记之，我们有

$$\sum_{k=1}^{m+n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |f(x'_i) - f(x'_{i-1})| + \sum_{j=1}^{n} |f(x''_j) - f(x''_{j-1})|$$

$$> \bigvee_a^c (f) + \bigvee_a^b (f) - \varepsilon.$$

由ε的任意性可知

$$\bigvee_a^b (f) \geqslant \bigvee_a^c (f) + \bigvee_c^b (f).$$

这就证明了(5.9)式。

定理5.4（Jordan分解定理） $f \in BV([a,b])$，当且仅当 $f(x) = g(x) - h(x)$，其中 $g(x)$与$h(x)$是$[a,b]$上的单调上升（实值）函数。

证明 (i) 设 $f \in BV([a,b])$。令

$$g(x) = \frac{1}{2}\bigvee_a^x (f) + \frac{1}{2}f(x), \quad h(x) = \frac{1}{2}\bigvee_a^x (f) - \frac{1}{2}f(x),$$

则 $f(x) = g(x) - h(x)$。因为$\bigvee_a^x (f)$作为x的函数是单调上升的实值函数，所以$h(x)$在$[a,b]$上的全变差是有限的，从而可知当$a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$时，有

$$2[h(y) - h(x)] = \bigvee_a^y (f) - \bigvee_a^x (f) - f(y) + f(x)$$

$$\geqslant \bigvee_x^y (f) - |f(y) - f(x)| \geqslant 0.$$

这说明 $h(x)$是$[a,b]$上的单调上升函数，易知 $g(x)$也是$[a,b]$上的单调上升函数。

(ii) 设 $f(x) = g(x) - h(x)$，其中 $g(x), h(x)$是$[a,b]$上的单调上升实值函数。易知 $g, h \in BV([a,b])$，从而 $f \in BV([a,b])$。

推论5.5 若 $f \in BV([a,b])$，则 $f(x)$是几乎处处可微的，且$f'(x)$是$[a,b]$上的可积函数。

例 若 $f \in L([a,b])$，则其不定积分

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

是$[a,b]$上的有界变差函数，其全变差为

$$\bigvee_a^b (F) = \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{5.10}$$

证明 对任一分划 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，我们有

$$\sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt \right|$$

$$\leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt < \infty.$$

从而可知 $F(x)$是$[a,b]$上的有界变差函数，且有

$$\bigvee_a^b (F) \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

为证明上式的反向不等式，首先注意到，若 $S(x)$是$[a,b]$上的一个阶梯函数：

$$S(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x) \quad (c_i \text{ 是 } 1 \text{ 或 } -1),\ x \in [a,b],$$

则有

$$\int_a^b S(t) f(t)\,dt = \sum_{i=1}^n c_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt \leqslant \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt \right|$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|F(x_i)-F(x_{i-1})|\leqslant\bigvee_a^b(F).$$

其次，作$[a,b]$上的阶梯函数列$\{\sigma_n(x)\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=f(x)\quad \text{a.e.}.$$

再作阶梯函数

$$S_n(x)=\begin{cases}1, & \sigma_n(x)>0,\\ 0, & \sigma_n(x)=0, \\ -1, & \sigma_n(x)<0,\end{cases}\quad n=1,2,\cdots.$$

由此可知

$$\int_a^b S_n(x)f(x)\mathrm{d}x\leqslant\bigvee_a^b(F).$$

另一方面又有

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)f(x)=|f(x)|\quad \text{a.e.},$$

故由控制收敛定理可得

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)f(x)\mathrm{d}x\leqslant\bigvee_a^b(F).$$

这就证明了(5.10)式。

§5.3 不定积分的微分

问题 设$f\in L([a,b])$，令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

等式$F'(x)=f(x)$成立吗？由于可积函数在一个零测集上修改其值并不影响它的积分值，故知一般的结论也只能期望

$$F'(x)=f(x)\quad \text{a.e.}.$$

下面证明这一结论是正确的。

如果令

$$F_h(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t,$$

那末我们的问题就归结为证明

$$\lim_{h\to 0} F_h(x) = f(x) \quad \text{a.e.}.$$

考虑到 $F_h(x)$ 可以看作函数 f 在 $[x, x+h]$ 上的(连续)平均，从而易证 $F_h(x)$ 是平均收敛于 $f(x)$ 的 $(h\to 0)$。即有

引理5.6 设 $f\in L([a,b])$，令

$$F_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$$

(当 $x\bar{\in}[a,b]$ 时，令 $f(x)=0$)，我们有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |F_h(x) - f(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

证明 不妨设 $h>0$，由于(见第四章习题)

$$\begin{aligned} F_h(x) - f(x) &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - f(x) \\ &= \frac{1}{h}\int_0^h f(x+t)\mathrm{d}t - f(x) \\ &= \frac{1}{h}\int_0^h [f(x+t) - f(x)]\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

故知

$$\begin{aligned} \int_a^b |F_h(x) - f(x)|\mathrm{d}x &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - f(x)|\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^h \frac{1}{h}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

因为 $f\in L((-\infty,\infty))$，由定理4.19可知，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|t|<\delta$ 时有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

所以当 $h<\delta$ 时有

$$\int_0^h \frac{1}{h}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{h}\int_0^h \mathrm{d}x = \varepsilon.$$

这说明对任给的 $\varepsilon>0$，当 $|h|<\delta$ 时，我们得到

$$\int_a^b |F_h(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

定理5.7 设 $f\in L([a,b])$，令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\qquad x\in[a,b],$$

则 $F'(x)=f(x)$ a.e..

证明 令

$$F_h(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

（当 $x\notin[a,b]$ 时，令 $f(x)=0$）。因为 $F(x)$ 是几乎处处可微的，所以不妨假定

$$\lim_{h\to 0} F_h(x)=g(x)\quad \text{a.e.},$$

$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数。上述引理指出，$F_h(x)$ 是平均收敛于 $f(x)$ 的 $(h\to 0)$，从而我们有

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{h\to 0}|f(x)-F_h(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\varliminf_{h\to 0}\int_a^b |f(x)-F_h(x)|\,\mathrm{d}x=0.$$

这说明 $g(x)=f(x)$ a.e..

这样，我们就回答了在本节开始时所提出的问题，即对于 $f\in L([a,b])$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)\quad \text{a.e.}.$$

注意，实际上我们得到的结论是：若 $f\in L([a,b])$，则对 $[a,b]$ 中几乎所有的点 x，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|\,\mathrm{d}t=0.$$

我们称满足这一等式的 x 为 f 的 Lebesgue 点，那末这就是说，

对于$f\in L([a,b])$，$[a,b]$中几乎所有的点都是Lebesgue点（在许多问题中，有关几乎处处的结论，我们只需讨论Lebesgue点就可以了）。

例 对于$[0,1]$上的Dirichlet函数$\chi_Q(x)$，我们有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\chi_Q(x)\mathrm{d}x=0.$$

这说明函数χ_Q的Lebesgue点集是$[0,1]\setminus Q$。

§5.4 绝对连续函数与微积分基本定理

问题 设$f(x)$是定义在$[a,b]$上的实值函数，问等式

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b]$$

是否成立或在什么条件下成立？

首先我们看到，如果等式成立，那末$f(x)$一定是有界变差的连续函数。其次若$f(x)$是$[a,b]$上的有界变差的连续函数，并令

$$h(x)=f(x)-\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

则$h'(x)=0$ a.e.且$h(a)=f(a)$。注意等式成立的意思就是$h(x)$应该恒等于一个常数。这里使我们回忆起Cantor函数$\Phi(x)$（见§1.5），它是$[0,1]$上的单调上升的连续函数，$\Phi'(x)=0$ a.e.。但$\Phi(x)$并不是常数，因为$\Phi(0)=0$，$\Phi(1)=1$。由此可知，为使等式成立，我们还需要给$f(x)$再加上一定的条件。

从上面的议论中我们已经看到，一个几乎处处可微且导数为零的函数并不一定等于一个常数。为了排除这种"奇异"情况，让我们进一步分析这类函数的特征。

引理5.8 设$f(x)$在$[a,b]$上几乎处处可微且$f'(x)=0$ a.e.，若$f(x)$在$[a,b]$上不是常数函数，则必存在$\varepsilon>0$，使得对任意的$\delta>0$，$[a,b]$内存在有限个互不相交的区间：

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ \cdots,\ (x_n,y_n),$$

其长度的总和小于 δ，使得

$$\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|>\varepsilon.$$

证明 因为 $f(x)$ 不是常数，所以不妨设存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f(a)\neq f(c)$。作点集

$$E_c=\{x\in(a,c):f'(x)=0\}.$$

对于任意的 $x\in E_c$，由于 $f'(x)=0$，故知对任意的 $r>0$，只要 h 充分小且 $[x,x+h]\subset(a,c)$，就有

$$|f(x+h)-f(x)|<rh.$$

于是（r 固定）如此之区间 $[x,x+h]$ 的全体就构成 E_c 的一个 Vitali 覆盖。根据 Vitali 定理，可知对任意的 $\delta>0$，存在互不相交的区间组：

$$[x_1,x_1+h_1],[x_2,x_2,+h_2],\cdots,[x_n,x_n+h_n],$$

$$m\left(E_c\setminus\bigcup_{i=1}^{n}[x_i,x_i+h_i]\right)=m\left([a,c)\setminus\bigcup_{i=1}^{n}[x_i,x_i+h_i)\right)<\delta.$$

不妨设这些区间的端点可排列为

$$a=x_0<x_1<x_1+h_1<x_2<x_2+h_2<\cdots<x_n+h_n<x_{n+1}=c.$$

令 $h_0=0$，并选 $\varepsilon>0$ 满足 $2\varepsilon<|f(c)-f(a)|$，我们有

$$\begin{aligned}
2\varepsilon&<|f(c)-f(a)|\\
&\leqslant\sum_{i=0}^{n}|f(x_{i+1})-f(x_i+h_i)|+\sum_{i=1}^{n}|f(x_i+h_i)-f(x_i)|\\
&\leqslant\sum_{i=0}^{n}|f(x_{i+1})-f(x_i+h_i)|+r\sum_{i=1}^{n}h_i\\
&\leqslant\sum_{i=0}^{n}|f(x_{i+1})-f(x_i+h_i)|+r(b-a).
\end{aligned}$$

因为 r 是任意的，可先使得 $r(b-a)<\varepsilon$，所以得到

$$\varepsilon<\sum_{i=0}^{n}|f(x_{i+1})-f(x_i+h_i)|,$$

而且

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-(x_i+h_i))=m\left(E_c-\sum_{i=1}^{n}(x_i,x_i+h_i)\right)<\delta.$$

现在针对引理中所描述的奇异特征，我们来引进下述绝对连续函数的概念。

定义5.4 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数。若对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的开区间 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,n)$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$$

时，有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数。

显然，我们有下述简单事实：

(i) 绝对连续函数一定是连续函数；

(ii) 在 $[a,b]$ 上绝对连续函数的全体构成一个线性空间。

例 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件：

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|,\quad x,y\in[a,b],$$

则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数。这是因为

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(y_i)|\leqslant M\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|<\delta M,$$

所以对于任意的 $\varepsilon>0$，只需取 $\delta<\varepsilon/M$ 立即可知结论成立.

定理5.9 若 $f\in L([a,b])$，则其不定积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

是$[a,b]$上的绝对连续函数。

证明 对于任意的$\varepsilon>0$，因为$f\in L([a,b])$，所以存在$\delta>0$，当$e\subset[a,b]$且$m(e)<\delta$时，有

$$\int_e |f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

现在对于$[a,b]$中任意有限个互不相交的区间：

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ \cdots,\ (x_n,y_n),$$

当其长度总和小于δ时，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}|F(y_i)-F(x_i)| = \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_i}^{y_i}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i}^{y_i}|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}(x_i,y_i)}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

定理5.10 若$f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数，则$f(x)$是$[a,b]$上的有界变差函数。

证明 在函数是绝对连续的定义中，取$\varepsilon=1$，可知存在$\delta>0$，当$[a,b]$中任意有限个互不相交开区间$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$满足

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$$

时，必有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|<1.$$

作分划Δ：$a=c_0<c_1<\cdots<c_n=b$，使得

$$c_{k+1}-c_k<\delta,\qquad k=0,1,\cdots,n-1.$$

从而有

$$\bigvee_{c_k}^{c_{k+1}}(f)\leqslant 1,\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

故得

$$\bigvee_a^b (f)\leqslant n.$$

推论5.11 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是几乎处处可微的，且 $f'(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数。

定理5.12 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，且 $f'(x)=0$ a.e.，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上等于一个常数。

证明可由引理5.8以及定义5.4直接推得。

有了以上关于绝对连续函数的概念及其性质的知识，我们就可以回答本节开始时所提出的问题了。

定理5.13(微积分基本定理) 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，则

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b]. \tag{5.11}$$

证明 令

$$g(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b],$$

则 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，且有

$$g'(x)=f'(x)\quad \text{a.e.},\quad g(a)=0.$$

再令 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h(x)$ 也是绝对连续的，且有

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0\quad \text{a.e.}.$$

从而可知 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一个常数，而 $h(a)=f(a)$，于是得

$$f(x)=h(x)+g(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b].$$

综合上述，可小结如下："一个定义在 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 具有形式

$$f(x)=f(a)+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\quad g(t)\in L([a,b])$$

的充分且必要条件为：$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数。此时我

们有 $g(x)=f'(x)$ a.e."。

例 设 $g_k(x)(k=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数。若

(i) 存在 $c, a\leqslant c\leqslant b$，使得级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(c)$$

收敛；

(ii) $$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b |g_k'(x)|\,\mathrm{d}x<\infty,$$

则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上是收敛的，设其极限函数为 $f(x)$，$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，且有

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x)\quad \text{a.e.}.$$

证明 由条件(ii)可知(见推论4.15)函数

$$G(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x),\quad x\in[a,b]$$

是 $[a,b]$ 上的可积函数且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_c^x \sum_{k=1}^{n} g_k'(t)\,\mathrm{d}t=\int_c^x G(t)\,\mathrm{d}t.$$

因为每个 $g_k(x)$ 都是绝对连续函数，所以有

$$g_k(x)=\int_c^x g_k'(t)\,\mathrm{d}t+g_k(c),\quad x\in[a,b].$$

从而可知

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(x)=\int_c^x \sum_{k=1}^{n} g_k'(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{n} g_k(c),\quad n=1,2,\cdots.$$

现在令 $n\to\infty$，即得

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = \int_c^x G(t)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(c), \quad x \in [a,b].$$

若令上式左端为 $f(x)$，则有

$$f(x) = \int_c^x G(t)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(c).$$

由此可知 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，且有

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x) \quad \text{a.e.}.$$

定理5.14（分部积分公式） 设 $f(x)$，$g(x)$ 皆为 $[a,b]$ 上的可积函数，$\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}^1$，令

$$F(x) = \alpha + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \quad G(x) = \beta + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$\int_a^b G(x)f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)F(x)\mathrm{d}x = F(b)G(b) - F(a)G(a). \tag{5.12}$$

证明 设 A，B 各为 $|F(x)|$，$|G(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，由 $|F(y)G(y) - F(x)G(x)| \leqslant A|G(y) - G(x)| + B|F(y) - F(x)|$，故知 $F(x) \cdot G(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数。从而 $F(x) \cdot G(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微，且有

$$(F(x)G(x))' = F(x)G'(x) + F'(x)G(x) \quad \text{a.e.}.$$

因为对几乎处处的 $x \in [a,b]$，有 $G'(x) = g(x)$ 与 $F'(x) = f(x)$，所以

$$\begin{aligned}
&\int_a^b G(x)f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b F(x)g(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b G(x)F'(x)\mathrm{d}x + \int_a^b F(x)G'(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b (F(x)G(x))'\mathrm{d}x = F(b)G(b) - F(a)G(a).
\end{aligned}$$

注意到绝对连续函数与不定积分的关系，上述定理可改述如

下：设 $f(x),g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，则

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx+\int_a^b f'(x)g(x)dx=f(b)g(b)-f(a)g(a).$$

例 设 $f\in L([a,b])$ 且有

$$\int_a^b x^n f(x)dx=0,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

则 $f(x)=0$ a.e.。

证明 令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，因为 $F(b)=0$ 且有

$$\int_a^b x^n f(x)dx=x^n F(x)\Big|_a^b-n\int_a^b x^{n-1}F(x)dx$$

$$=-n\int_a^b x^{n-1}F(x)dx=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

所以我们得到

$$\int_a^b x^n F(x)dx=0,\quad n=0,1,\cdots.$$

现在，根据多项式一致逼近连续函数的定理，可知对任意的 $\varepsilon>0$，存在多项式 $P(x)$，使得 $|F(x)-P(x)|<\varepsilon(x\in[a,b])$。注意到

$$\int_a^b P(x)F(x)dx=0,$$

我们有

$$\int_a^b F^2(x)dx=\int_a^b F(x)[F(x)-P(x)]dx.$$

从而可知

$$\int_a^b F^2(x)dx\leqslant\varepsilon\int_a^b|F(x)|dx.$$

由 ε 之任意性可得 $F(x)\equiv0$，随之又得 $f(x)=0$ a.e.。

定理5.15（积分第一中值公式）* 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上非负可积函数，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx. \tag{5.13}$$

证明 记 $f([a,b])=[c,d]$，则有

$$cg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant dg(x)\quad \text{a.e.}.$$

将上式积分，我们有

$$c\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant d\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

若 $I=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$，则用它来除上式两端可得

$$c\leqslant\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{I}\leqslant d.$$

由 f 的连续性可知，存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}.$$

此即(5.13)式。

若 $I=0$，则 $g(x)=0$ a.e.。从而(5.12)式两端皆为零，此时 ξ 可任意地选取。

定理5.16(积分第二中值公式)* 若 $f\in L([a,b])$，$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.\quad(5.14)$$

证明 不妨设 $g(x)$ 是单调上升函数(否则考察 $-g(x)$)，证明分两步进行：

(i) 假定 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调上升的绝对连续函数，令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b].$$

由分部积分公式可知

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=F(b)g(b)-F(a)g(a)-\int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

因为 $F(x)$ 是连续函数且 $g'(x)\geqslant 0$ a.e.，所以由(5.13)式可知，存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x = F(\xi)\int_a^b g'(x)\mathrm{d}x = F(\xi)[g(b)-g(a)].$$

将上式代入前一式得到

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)[F(\xi)-F(a)] + g(b)[F(b)-F(\xi)]$$

$$= g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) 对于 $g(x)$ 是单调上升的情形，我们可以作一列单调上升且绝对连续的函数 $\{g_n(x)\}$，使得 $g_n(a)=g(a)$，$g_n(b)=g(b)$ $(n=1,2,\cdots)$，且有

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \quad \text{a. e.} ①.$$

对于 $g_n(x)$，由(i)的结论，则存在 $\xi_n\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g_n(x)\mathrm{d}x = g_n(a)\int_a^{\xi_n} f(x)\mathrm{d}x + g_n(b)\int_{\xi_n}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这里不妨假定数列 $\{\xi_n\}$ 以 $\xi\in[a,b]$ 为极限(否则可取子列)。于是令 $n\to\infty$，上式转化为(5.14)式。

§5.5* 积分换元公式

问题 设 $g:[a,b]\to[c,d]$ 是几乎处处可微的函数，$f(x)$ 是 $[c,d]$ 上的可积函数，公式

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t, \quad [\alpha,\beta]\subset[a,b]$$

---

① 把 $[a,b]$ n 等分，令 $h_n=(b-a)/n$ 以及

$$x_{n,k}=a+kh_n, \quad 0\leqslant k\leqslant n,$$

作函数列：

$$g_n(x)=\begin{cases} g(x), & x=x_{n,k}, \\ \text{线性联结}, & x\in[x_{n,k-1},x_{n,k}] \end{cases}$$
$$n=1,2,\cdots, \quad k=0,1,\cdots,n.$$

当 x 是 g 的连续点时有

$$|g(x)-g_n(x)|\leqslant|g(x_{n,k-1})-g(x_{n,k})|, \quad x_{n,k-1}\leqslant x\leqslant x_{n,k}.$$

是否成立？

我们注意到，当 $f(x)\equiv 1$ 时，公式化为

$$g(\beta)-g(\alpha)=\int_\alpha^\beta g'(t)\mathrm{d}t,$$

由此可见，要使公式成立，还需添加其它的条件。从 Riemann 积分的换元公式的学习中，我们知道这类问题与复合函数的微分有关。在这里，情况也类似，只是更复杂一些。在此之前，我们先来介绍几个关于可微点集与映象集的测度之间关系的结论。

引理5.17 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，$E\subset[a,b]$ 且 $m(E)=0$，则 $m(f(E))=0$。

证明 根据绝对连续函数的定义不难推知，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $[a,b]$ 中互不相交的区间列 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots)$ 满足

$$\sum_{i=1}^{\infty}(y_i-x_i)<\delta$$

时，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f(y_i)-f(x_i)|\leqslant\varepsilon.$$

现在令 $G=\bigcup_{i=1}^{\infty}(x_i,y_i)$ 且 $(a,b)\supset G\supset E\setminus\{a,b\}$，选 $[x_i,y_i]$ 中的点 c_i 与 d_i，使得

$$f([x_i,y_i])=[f(c_i),f(d_i)].$$

从而可得

$$m(f(E))=m(f(E\setminus\{a,b\})),$$

$$m\left(f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(x_i,y_i)\right)\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|f(d_i)-f(c_i)|\leqslant\varepsilon.$$

推论5.18 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，E 是 $[a,b]$ 中的可测集，则 $f(E)$ 是可测集。

引理5.19 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数，$E\subset[a,b]$。如果

$f'(x)$在E上存在且$|f'(x)|\leqslant M$，则

$$m^*(f(E))\leqslant M\cdot m^*(E). \tag{5.15}$$

证明 将点集E作如下分解：对任给$\varepsilon>0$，作

$$E_n=\left\{x\in E:\text{当}[a,b]\text{中的点 }y\text{ 满足}|y-x|<\frac{1}{n}\text{时，}\right.$$

$$\left.\text{有}|f(y)-f(x)|\leqslant(M+\varepsilon)|x-y|\right\}.$$

显然有$E_n\subset E_{n+1}$，$f(E_n)\subset f(E_{n+1})$以及

$$\lim_{n\to\infty}m^*(E_n)=m^*(E),\quad \lim_{n\to\infty}m^*(f(E_n))=m^*(f(E)).$$

从而根据ε的任意性，我们只需证明对每个n有

$$m^*(f(E_n))<(M+\varepsilon)(m^*(E_n)+\varepsilon).$$

为此，在(a,b)中取覆盖E_n的开区间列$\{I_{n,k}\}$，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_{n,k}|<m^*(E_n)+\varepsilon,\quad |I_{n,k}|<\frac{1}{n},\ k=1,2,\cdots.$$

显然，若$s,t\in E_n\cap I_{n,k}$，则有

$$|f(s)-f(t)|<(M+\varepsilon)|I_{n,k}|.$$

于是得到

$$m^*(f(E_n))=m^*\left(f\left(E_n\cap\bigcup_{k=1}^{\infty}I_{n,k}\right)\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(f(E_n\cap I_{n,k}))$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{diam}(f(E_n\cap I_{n,k}))$$

$$\leqslant(M+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}|I_{n,k}|<(M+\varepsilon)(m^*(E_n)+\varepsilon).$$

（这里$\mathrm{diam}(A)$表示点集A的直径，见定义1.17。）

推论5.20 若$f(x)$是$[a,b]$上的可测函数，$E\subset[a,b]$是可测集且$f(x)$在E上可微，则

$$m^*(f(E))\leqslant\int_E|f'(x)|\,dx. \tag{5.16}$$

证明 易知$f'(x)$是E上的可测函数. 对于任给的$\varepsilon>0$, 作集合列

$$E_n=\{x\in E:(n-1)\varepsilon\leqslant|f'(x)|<n\varepsilon\},\quad n=1,2,\cdots,$$

由引理5.19, 我们有

$$m^*(f(E_n))\leqslant n\varepsilon m(E_n)\leqslant(n-1)\varepsilon m(E_n)+\varepsilon m(E_n)$$

$$\leqslant\int_{E_n}|f'(x)|\mathrm{d}x+\varepsilon m(E_n).$$

由此可知

$$m^*(f(E))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*(f(E_n))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f'(x)|\mathrm{d}x+\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)$$

$$=\int_E|f'(x)|\mathrm{d}x+\varepsilon m(E).$$

由ε的任意性, 即得$m^*(f(E))\leqslant\int_E|f'(x)|\mathrm{d}x$.

例 设$f(x)$在$[a,b]$上是处处可微的, 且$f'(x)$是$[a,b]$上的可积函数, 则

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a).$$

证明 因为$f'\in L([a,b])$, 所以对于任意的$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 当$e\subset[a,b]$且$m(e)<\delta$时, 有

$$\int_e|f'(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

从而对于其长度总和小于δ的任意的互不相交区间组(x_1,y_1), $(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$, 可知

$$\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}m(f([x_i,y_i]))$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{(x_i,y_i)}|f'(x)|\mathrm{d}x=\int_{\bigcup_{i=1}^{n}(x_i,y_i)}|f'(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

这说明 $f(x)$ 是$[a,b]$上的绝对连续函数，故结论成立。

定理5.21 设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的实值函数，在$[a,b]$的子集 E 上是可微的。我们有

(i) 若在 E 上 $f'(x)=0$ a.e.，则 $m(f(E))=0$；

(ii) 若 $m(f(E))=0$，则在 E 上 $f'(x)=0$ a.e.。

证明 (i) 令 $E_n=\{x\in E: n-1<|f'(x)|\leqslant n\}(n=1,2,\cdots)$，则

$$m^*(f(E))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*(f(E_n))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot m^*(E_n).$$

所以由 $m^*(E_n)=0$ 可知，$m(f(E))=0$。

(ii) 作点集

$$B_n=\left\{x\in E: 当\ |y-x|<\frac{1}{n}时，|f(y)-f(x)|\geqslant\frac{|y-x|}{n}\right\}.$$

显然有

$$B=\{x\in E: |f'(x)|>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n.$$

从而只需证明 $m(B_n)=0$（一切 n）即可。为此，又只需指出对于任一个长度小于 $1/n$ 的区间 I，有 $m(I\cap B_n)=0$。

记 $A=I\cap B_n$，因为由假设知 $m(f(A))=0$，所以对任意的 $\varepsilon>0$，存在区间列$\{I_k\}$，使得

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\supset f(A),\quad \sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<\varepsilon.$$

现在令 $A_k=A\cap f^{-1}(I_k)$，因为

$$A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\quad 且\quad A_k\subset I\cap B_n,$$

又注意到 $f(A_k)\subset I_k$，所以我们有

$$m^*(A)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(A_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{diam}(A_k)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{diam}(f(A_k))$$

$$\leqslant n \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \leqslant n\varepsilon.$$

由 ε 之任意性知 $m(A)=0$。

定理5.22(复合函数的微分) 设$g:[a,b]\to[c,d]$是几乎处处可微的函数，$F(x)$是$[c,d]$上的几乎处处可微的 函 数 且 $F'(x)=f(x)$ a.e.，$F(g(t))$在$[a,b]$上是几乎处处可微的。若对于$[c,d]$中的任一零测集 Z，总有 $m(F(Z))=0$，则

$$[F(g(t))]'=f[g(t)]g'(t) \quad \text{a.e.}\ (\text{于}[a,b]). \quad (5.17)$$

证明 令 $Z=\{x\in[c,d]: F$ 在 x 处不可微$\}$，$A=g^{-1}(Z)$且$B=[a,b]\setminus A$。对于B中使 g 是可微的点 t，根据 g 在 t 处的连续性以及 $F'[g(t)]=f(g(t))$，我们有

$$F(g(t+h))-F(g(t))=[f(g(t))+\delta(h)]\cdot[g(t+h)-g(t)],$$

其中当 $h\to0$ 时 $\delta(h)\to0$(若 $g(t+h)=g(t)$，令 $\delta(h)=0$)。用 h 除上式两端并令 $h\to0$，可知(5.17)式在 B 上几乎处处成立。

因为$m(g(A))\leqslant m(Z)=0$，所以由假定得 $m(F(g(A)))=0$。从而根据定理5.21，可知

$$g'(t)=0=[F(g(t))]' \quad \text{a.e.},\quad t\in A.$$

综合上述结果得到

$$[F(g(t))]'=f[g(t)]g'(t) \quad \text{a.e.},\quad t\in[a,b].$$

注意，在上述定理中，F 将零测集映为零测集这一条件是重要的。事实上，设 g 是$[0,1]$上的严格单调上升的连续函数且$g'(t)=0$ a.e.，而令 $F=g^{-1}$，易知 $F(x)$ 是单调且几乎处处可微的函数，$[F(g(t))]'=1(t\in[a,b])$，但是(5.17)式不成立。

推论5.23 设 $g(t)$ 以及 $f(g(t))$ 在$[a,b]$上几乎处处可微，其中 $f(x)$ 在$[c,d]$上绝对连续，$g([a,b])\subset[c,d]$，则

$$[f(g(t))]'=f'(g(t))g'(t) \quad \text{a.e.},\quad t\in[a,b].$$

定理5.24(换元积分法) 假设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是几乎处处可微的，$f(x)$ 是 $[c,d]$ 上的可积函数，且 $g([a,b])\subset[c,d]$。记

$$F(x)=\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

则下述两个命题是等价的：

(i) $F(g(t))$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数；

(ii) $f(g(t))g'(t)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数且有

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{5.18}$$

其中 $\alpha,\beta\in[a,b]$。

证明 假定(ii)成立，则由(5.18)式可知，对一切 $\alpha,\beta\in[a,b]$ 有

$$F(g(\beta))-F(g(\alpha))=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

这说明 $F(g(t))$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数。

反之，假定(i)成立，则定理5.22的条件满足。因为 $[F(g(t))]'$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数，所以 $f(g(t))g'(t)$ 也是 $[a,b]$ 上的可积函数。从而得到

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x=F(g(\beta))-F(g(\alpha))=\int_\alpha^\beta [F(g(t))]'\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

在上面的定理中，并没有要求 $g(t)$ 是绝对连续函数，实际上这也是不必要的。例如令

$$F(x)=x^2;\quad g(t)=\begin{cases} t\sin\dfrac{1}{t}, & t\neq 0,\\ 0, & t=0,\end{cases}$$

则 $g(t)$ 除 $t=0$ 外皆可微，而且不是 $[0,1]$ 上的绝对连续函数。然而 $F(x)$ 与 $F(g(t))$ 都在 $[0,1]$ 上绝对连续(导数有界)。不过我们

有下述推论：

推论5.25 设 $g:[a,b]\to[c,d]$ 是绝对连续函数，$f\in L[c,d]$ 则下述条件之一都是(5.18)成立的充分条件：

(i) $g(t)$ 在 $[a,b]$ 上是单调函数；

(ii) $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上是有界函数；

(iii) $f(g(t))g'(t)$ 在 $[a,b]$ 上是可积函数。

证明 （详细证明从略）令

$$F(x)=\int_c^x f(u)\mathrm{d}u,\quad x\in[c,d],$$

则问题归结为证明 $F(g(t))$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续。对于(iii)，利用(ii)以及控制收敛定理即可。

§5.6* R^n 上积分的微分定理与积分换元公式

(一) 不定积分的微分定理

我们首先必须有 R^n 上函数不定积分的适当定义。当然，平行于 R^1 的情形，例如在 R^2 上函数 f 的不定积分应为

$$F(x,y)=\int_a^x\int_c^y f(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$$

这就是说定义不定积分为点函数。然而，我们将会看到采用集合函数的观点来定义不定积分将会更顺当些。

一般说来，设 $f\in L(A)$，我们称

$$F(E)=\int_E f(y)\mathrm{d}y$$

为 f 的不定积分，其中 E 是 A 中的任一可测集。

要把一维情形的公式

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)\quad \text{a.e.}$$

推广到多维，情况比较复杂，我们在这里不再详尽讨论，而只研究

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}f(y)\mathrm{d}y=f(x)\quad \text{a.e.}\tag{5.19}$$

或

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|I_x(r)|}\int_{I_x(r)}f(y)\mathrm{d}y=f(x)\quad \text{a.e.}$$

是否成立的问题，其中$|E|$表示点集E的测度($I_x(r)$表示以x为中心且边长为r的方体)。

下面我们以$E=B(x,r)$为例来给出不定积分的微分定理。($E=I_x(r)$的情形类似)为此先介绍相应的覆盖定理。

定理5.26 设$E\subset \mathbf{R}^n$，Γ是一个覆盖E的球族$\{B_\alpha\}$。即对每个$x\in E$，存在Γ中的球$B(x,r(x))$。记$r(B)$为球$B(x, r(x))$的半径。若

$$\sup\{r(B):B\in\Gamma\}<\infty,$$

则Γ中存在互不相交的球$B_1,B_2,\cdots$,使得

$$m^*(E)\leqslant 5^n\sum_{k\geqslant 1}|B_k|.\tag{5.20}$$

证明 首先在Γ中取球$B_1=B(x_1,r(x_1))$，满足

$$r(B_1)\geqslant\frac{1}{2}\sup\{r(B):B\in\Gamma\}.$$

其次假定已经取定B_1, B_2, $\cdots$, B_k，若Γ中已不存在与此k个球不相交的球，则选取过程终止；否则再在Γ中取出与$B_1,B_2,\cdots,B_k$不相交的球B_{k+1},它满足

$$r(B_{k+1})\geqslant\frac{1}{2}\sup\{r(B):B\in\Gamma,B\cap B_j=\varnothing\quad(1\leqslant j\leqslant k)\},$$

并重复上述过程。对每个B_k作球B_k^*，它与B_k同心且

$$r(B_k^*)=5r(B_k)$$

(易知$|B_k^*|=5^n|B_k|$)。由此可知，Γ中凡与B_k相交且与$B_j(1\leqslant j<k-1)$不交的球必含于B_k^*。

现在，我们来证明

$$E\subset\bigcup_k B_k^*.$$

若选取过程到有限步终止，则上式显然成立。

若选取过程不能有限步终止，则得球列$\{B_k\}$与$\{B_k^*\}$。在

$$\sum_{k=1}^{\infty}|B_k|=\infty$$

的情形下，引理结论不证自明。从而不妨假定

$$\sum_{k=1}^{\infty}|B_k|<\infty.$$

此时，因为$|B_k|\to 0(k\to\infty)$，所以对于任意的$B\in\Gamma$，存在k，使$r(B_{k+1})<r(B)/2$。这就是说B必须与$B_1,B_2,\cdots,B_k$中的某些相交，不妨令B与B_{k_0}相交(最小下标)。由此知$B\subset B_{k_0}^*$。

以上的讨论说明不论发生哪种情形，都有$E\subset\bigcup_k B_k^*$。由此立即推得

$$m^*(E)\leqslant\sum_k|B_k^*|=5^n\sum_k|B_k|.$$

为了证明(5.19)式成立，我们令

$$L_rf(x)=\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}f(y)\,\mathrm{d}y.$$

类似于$\boldsymbol{R}^1$中的情形，可以证明当$r\to 0$时，$L_rf(x)$也是平均收敛于$f(x)$的。即

引理5.27 若$f\in L(\boldsymbol{R}^n)$，则

$$\lim_{r\to 0}\int_{\boldsymbol{R}^n}|L_rf(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0.$$

证明 我们有

$$\int_{R^n}\left|\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}f(y)\mathrm{d}y-f(x)\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{R^n}\left[\int_{B(0,r)}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(0,r)}\left[\int_{R^n}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

由 f 的平均连续性可知，当 r 充分小时上式积分可任意地小，即得所证。

由此引理立即可知，存在子列$\{r_k\}$，$r_k\to0(k\to\infty)$，使得

$$\lim_{k\to\infty}L_{r_k}f(x)=f(x)\quad \text{a.e.}.$$

这样，为证 $L_rf(x)\to f(x)$ a.e. $(r\to0)$，只需指出当 $r\to0$时，$L_rf(x)$的极限几乎处处存在即可。

若令

$$(\Omega f)(x)=|\overline{\lim_{r\to0}}L_rf(x)-\underline{\lim_{r\to0}}L_rf(x)|,$$

则又只需证明$(\Omega f)(x)=0$ a.e.。也就是要证明，对任意的 $\lambda>0$ 有

$$m(\{x:(\Omega f)(x)>\lambda\})=0,$$

或说

$$m(\{x:(\Omega f)(x)>\lambda\})<\varepsilon,$$

其中 ε 可任意地小。大家知道，对于任给的 $\varepsilon>0$，我们可以把 f 分解为 $f(x)=g(x)+h(x)$，其中 $g(x)$是具有紧支集的连续函数，$h(x)$满足

$$\int_{R^n}|h(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

对于 $g(x)$来说，易知

$$\lim_{r\to0}L_rg(x)=g(x),\quad x\in \boldsymbol{R}^n.$$

即$(\Omega g)(x)=0$。从而可得

$$(\Omega f)(x) \leqslant (\Omega g)(x) + (\Omega h)(x) = (\Omega h)(x).$$

于是全部问题转化为证明

$$m(\{x:(\Omega h)(x) > \lambda\}) < \varepsilon.$$

为此，下面来引进极大函数的概念。

定义5.5 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数，令

$$(Mf)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| \mathrm{d}y, \qquad (5.21)$$

称它为 f 的 Hardy-Littlewood(球)极大函数，简称为 H-L 极大函数。显然有 $\sup_{r>0} |L_r f(x)| \leqslant (Mf)(x)$.

此外，若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上局部可积的函数(即在任一有界可测集上均可积)，则 $(Mf)(x)$ 是下半连续函数，当然也是可测函数。极大函数在实变函数论以及在调和分析理论中扮演着重要的角色。对于 L^1 中的函数 f，我们有下述所谓极大函数的弱(1,1)型事实，由此立即可得不定积分的微分定理。

引理5.28(极大函数的分布函数的估计) 若 $f \in L(\mathbf{R}^n)$，则对任意的 $\lambda > 0$ 有

$$m(\{x:(Mf)(x) > \lambda\}) \leqslant \frac{A}{\lambda} \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)| \mathrm{d}x, \qquad (5.22)$$

其中常数 A 只与 $\mathbf{R}^n$ 的维数 n 有关，而与 f 无关。

证明 令 $E_\lambda = \{x:(Mf)(x) > \lambda\}$. 对 E_λ 中任意的点 x，因为 $(Mf)(x) > \lambda$，所以存在球 $B_x = B(x,r)$，使得

$$\frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} |f(t)| \mathrm{d}t > \lambda,$$

即有

$$|B_x| < \frac{1}{\lambda} \int_{B_x} |f(t)| \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbf{R}^n} |f(t)| \mathrm{d}t < \infty.$$

这就是说 $\{B_x\}$ 是 E_λ 的覆盖族，且满足覆盖定理5.26的条件，从而存在互不相交的球列 $\{B_k\}$，使得

$$m(E_\lambda)\leqslant 5^n\sum_{k\geqslant 1}|B_k|.$$

由此可知

$$m(E_\lambda)\leqslant\frac{5^n}{\lambda}\int_{\bigcup\limits_{k\geqslant 1}B_k}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{5^n}{\lambda}\int_{R^n}|f(x)|\mathrm{d}x,\quad A=5^n.$$

定理5.29(R^n 上不定积分的微分定理) 若 $f\in L(R^n)$，则

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}f(y)\mathrm{d}y=f(x)\quad\text{a.e.}.$$

证明 根据前面的分析，我们只需证明，对任意的$\lambda>0$有

$$m(\{x:(\Omega h)(x)>\lambda\})<\varepsilon,$$

其中$\int_R|h(x)|dx<\varepsilon$。因为

$$(\Omega h)(x)=|\overline{\lim_{r\to 0}}L_rh(x)-\underline{\lim_{r\to 0}}L_rh(x)|$$

$$\leqslant 2\sup_{r>0}|L_rh(x)|\leqslant 2(Mh)(x),$$

所以结合上述引理，可知

$$m(\{x:(\Omega h)(x)>\lambda\})\leqslant m\left(\left\{x:(Mh)(x)>\frac{\lambda}{2}\right\}\right)$$

$$\leqslant\frac{2A}{\lambda}\int_{R^n}|h(x)|\mathrm{d}x<\frac{2A}{\lambda}\varepsilon.$$

注 上述定理的结论也可写成

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int_{|y|<r}[f(x-y)-f(x)]\mathrm{d}y=0\quad\text{a.e.}.$$

此外，由于微分只涉及局部性质，故上述定理对局部可积函数也是成立的。实际上，我们还可得到更强的结论：若 $f(x)$是 R^n 上的局部可积函数，则

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int_{|y|<r}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y=0\quad\text{a.e.},$$

这只需再回到引理5.27的证明就可得知。

（二）积分换元公式

关于多维欧氏空间上的积分换元公式，我们仅讨论一种特定情形，即变换是所谓微分同胚的情形。

设U是$\boldsymbol{R}^n$中的开集，$\varphi: U \to \boldsymbol{R}^n$，$t_0 \in U$，若存在线性变换$T$：$\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$以及$\delta > 0$，使得当$t \in U \cap B(t_0, \delta)$时有

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + T(t - t_0) + o(t - t_0),$$

其中$o(t - t_0)$是一个从U到$\boldsymbol{R}^n$的函数且有

$$\lim_{t \to t_0} \frac{o(t - t_0)}{|t - t_0|} = 0,$$

则称φ在t_0点是可微的。此时，线性变换T常用$\varphi'(t_0)$表示，称为φ在t_0点的微商(变换)。若φ在U内每一点上均可微，则称φ在U上可微。

当有表示式$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t))$时，$\varphi$可微就推出每一个偏导数

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i} = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi_j(t + he_i) - \varphi_j(t)}{h}$$

存在，其中$e_i (i = 1, 2, \cdots, n)$是$\boldsymbol{R}^n$中的标准基。

我们称

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

为φ的Jacobi矩阵，其行列式称为Jacobi行列式，记为$J_\varphi(t)$。

设$\varphi: U \to \boldsymbol{R}^n$。若$\varphi$在$U$上可微而且它的一切偏导数都是连续的，则称$\varphi$是$C^1$变换。显然，若$\varphi$是$C^1$变换，则其Jacobi行列式是$U$上的连续函数。

从第二章§2.5的讨论可知，φ 是否把零测集变为零测集是一个十分重要的问题。

引理5.30 设 $\varphi: U\to \boldsymbol{R}^n$ 是 C^1 变换。若 Z 是 U 中的零测集，则 $m(\varphi(Z))=0$。

证明 (i) 假定存在 $M>0$，使得对一切 $t\in U$ 有

$$\left|\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}\right|\leqslant M,\quad i,j=1,2,\cdots,n,$$

并记 $L=nM+1$。若 $t_0\in U$，则由 φ 的可微性，存在 $B(t_0,\delta_0)\subset U$，使得当 $t\in B(t_0,\delta_0)$时有

$$|T(t)-T(t_0)|<nM|t-t_0|+|t-t_0|=L|t-t_0|.$$

令 $\varepsilon>0$，取开集 G，$Z\subset G\subset U$ 且 $m(G)<\varepsilon$，并把 G 表为

$$G=\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j,$$

每个 K_j 都是紧集。因为 φ 是连续的，所以每个 $\varphi(K_j)$ 都是紧集，从而可知 $\varphi(G)$ 是 Borel 集。

现在设 H 是 $\varphi(G)$ 中的任一紧集，对每个 $x\in H$，取 $s\in G$ 使得 $x=\varphi(s)$，因而又存在 $B_s=B(s,\delta_s)\subset G$，使得

$$|T(t)-x|<L|t-s|,\quad t\in B_s.$$

显然，$\varphi(B_s)\subset B(x,L\delta_s)=B_s^*$。由于 H 是紧集，故存在 $s_1,\cdots,s_p\in H$，使得

$$H\subset\bigcup_{i=1}^{p}B^*_{s_i}.$$

不难证明，存在绝对常数 L_1，在 $B^*_{s_1},\cdots,B^*_{s_p}$ 中存在 $B_1^*,\cdots,B_q^*$，且它们互不相交，使得

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{p}B^*_{s_i}\right)\leqslant(L_1)^n\sum_{j=1}^{q}m(B_j^*)$$

$$=(LL_1)^n\sum_{j=1}^{q}m(B_j),$$

注意到相应的 $B_1, \cdots, B_q$ 也是互不相交的，因而可得(再记 $c=LL_1$)

$$m(H) \leqslant m\left(\bigcup_{j=1}^{q} B^*_j\right) \leqslant c^n \sum_{j=1}^{q} m(B_j)$$

$$= c^n m\left(\bigcup_{j=1}^{q} B_j\right) \leqslant c^n m(G) < c^n \varepsilon.$$

因为 H 是 $\varphi(G)$ 中的任一紧集，所以有 $m(\varphi(G)) \leqslant c^n \varepsilon$。从而可知

$$m(\varphi(Z)) \leqslant m(\varphi(G)) \leqslant c^n \varepsilon.$$

由 ε 的任意性得 $m(\varphi(Z)) = 0$。

(ii) 对于一般情形，作开球 B_k，$\overline{B}_k \subset U (k = 1, 2, \cdots)$，使得

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,$$

其中每个 B_k 均以有理点为球心，正有理数为半径。因为 $\overline{B}_k$ 是紧集以及 φ 是 C^1 变换，而 $\varphi: B_k \to \boldsymbol{R}^n$ 是满足条件(i)的，所以有

$$m(\varphi(Z \cap B_k)) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

从而可知

$$m(\varphi(Z)) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \varphi(Z \cap B_k)\right) = 0.$$

推论5.31 设 $\varphi: U \to V$ 是 C^1 变换，U, V 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集。若 $E \in \mathscr{M}$，则 $\varphi(E) \in \mathscr{M}$。

下面，我们总是假定 $\varphi: U \to V$，U、V 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，满足下述条件：

(i) φ 是一一变换；

(ii) φ 是 C^1 变换；

(iii) $J_\varphi(t) \neq 0 (t \in U)$。

此时，逆映射 $\psi = \varphi^{-1}$ 同样满足 (i)—(iii) (见 Hoffman K., Analysis in Euclidean Space, Prentice-Hall, INC., 1975.)。

并且满足

$$J_\varphi(\psi(x))J_\psi(x)=1,\qquad x\in V.$$

现在我们要在变换 φ 下建立积分换元公式，为此，先叙述几个引理。

引理5.32 若 $f(x)$ 是 V 上的非负连续函数，则

$$\int_{\varphi(I)}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_I f(\varphi(t))\,|J_\varphi(t)|\,\mathrm{d}t,\tag{5.23}$$

其中 I 是 R^n 中的二进方体且 $\bar{I}\subset U$。

证明 记(5.23)式左端为 $p(I)$，右端为 $q(I)$。假定(5.23)式不成立，则存在 $c>0$ 以及某个 I_0，使得

$$p(I_0)=q(I_0)+c.$$

设 I_0 是 l_0 级二进方体①，则可选 l_0+1 级二进方体 I_1，$(I_1\subset I_0)$，使得

$$p(I_1)\geqslant q(I_1)+2^{-n}c.$$

同理可选 l_0+2 级二进方体 $I_2(I_2\subset I_1)$，使得

$$p(I_2)\geqslant q(I_2)+2^{-2n}c.$$

依据归纳法，可得

$$I_0\supset I_1\supset\cdots\supset I_k\supset\cdots,$$

使得 I_k 是 l_0+k 级二进方体且有

$$p(I_k)\geqslant q(I_k)+2^{-nk}c,\qquad k=0,1,\cdots.$$

记 t_0 是属于一切 $\bar{I}_k$ 的唯一点，则 $t_0\in\bar{I}_0\subset U$。令 $x_0=\varphi(t_0)$，$y_0=f(x_0)$。$\beta_0=|J_\varphi(t_0)|$。我们取正数 ε 与 δ，使得 $2^{-l_0n}\cdot\varepsilon<c$ 且有

$$(y_0+\delta)(1+\delta)^n\beta_0<\varepsilon+(y_0-\delta)(\beta_0-\delta).$$

作 x_0 的一个(球)邻域 $W\subset V$，使得

---

① 设 $t=(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in R^n$，$s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in Z^n$（整数组），$l\in Z$，称
$$I=\{x\in R^n: s_j<2^l t_j\leqslant s_j+1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$$
为 l 级二进方体。

(i) $|f(x)-f(x_0)|<\delta \quad (x\in W)$。

因为 $J_\varphi(t_0)\neq 0$，所以相应于 $J_\varphi(t_0)$ 的矩阵所表示的线性变换 T 是可逆的，而且存在最小的 M，使得

$$|T^{-1}(x)|\leqslant M|x|, \qquad x\in \boldsymbol{R}^n.$$

由 φ 与 J_φ 的连续性可知，可选取含于 U 中的 t_0 的邻域 B_0，使得当 $t\in B_0$ 时，则 $\varphi(t)\in W$。

(ii) $|\varphi(t)-[x_0+T(t-t_0)]|\leqslant \delta|t-t_0|/2Mn$。

(iii) $|J_\varphi(t)|>|J_\varphi(t_0)|-\delta=|\det T|-\delta=\beta_0-\delta$。

取 k_0(充分大)使得 $I_{k_0}\subset B_0$，由(i)得

$$y_0-\delta<f(x)<y_0+\delta, \qquad x\in\varphi(I_{k_0}),$$

由(iii)知当 $t\in I_{k_0}$ 有 $|J_\varphi(t)|>\beta_0-\delta$。于是得

$$p(I_{k_0})\leqslant(y_0+\delta)m(\varphi(I_{k_0})),$$

$$q(I_{k_0})>(y_0-\delta)(\beta_0-\delta)m(I_{k_0})$$

$$>[(y_0+\delta)(1+\delta)^n\beta_0-\varepsilon]m(I_{k_0}).$$

从而知

$$\varepsilon m(I_{k_0})=2^{-(l_0+k_0)n}\varepsilon<2^{-k_0n}c\leqslant p(I_{k_0})-q(I_{k_0})$$

$$<(y_0+\delta)m(\varphi(I_{k_0}))-[(y_0+\delta)(1+\delta)^n\beta_0-\varepsilon]m(I_{k_0})$$

$$=m(I_{k_0})\varepsilon+(y_0+\delta)[m(\varphi(I_{k_0}))-(1+\delta)^n\beta_0 m(I_{k_0})].$$

由于 $y_0+\delta>f(x_0)\geqslant 0$，我们有

(iv) $m(\varphi(I_{k_0}))>(1+\delta)^n\beta_0 m(I_{k_0})$。

现在取闭方体 I'_{k_0}，其中心与 I_{k_0} 相同且边长为 $(1+\delta)\sigma$，其中 $\sigma=2^{-(l_0+k_0)}$ 是 I_{k_0} 的边长。则

$$m(I'_{k_0})=(1+\delta)^n\sigma^n=(1+\delta)^n m(I_{k_0}).$$

根据(iv)得到

(v) $m(\varphi(I_{k_0}))>\beta_0 m(I'_{k_0})=|\det T|\,m(I'_{k_0})$。

但我们可以证明

(vi) $\varphi(I_{k_0})\subset x_0+T(I'_{k_0})-T(t_0)$。

如果 (vi) 成立，则得

$$m(\varphi(I_{k_0})) \leqslant m(T(I'_{k_0})) = |\det T| m(I'_{k_0}).$$

这与 (v) 矛盾,从而引理就证明了.

下面证明 (vi) 成立. 设 $x \in \varphi(I_{k_0})$, 记 $s = T^{-1}(x - x_0) + t_0$, 则

(vii) $x_0 + T(s - t_0) = x = \varphi(t)$ (某个 $t \in I_{k_0} \subset B_0$), 故有

$$\begin{aligned} s - t &= T^{-1}(T(s - t_0) - T(t - t_0)) \\ &= T^{-1}(\varphi(t) - x_0 - T(t - t_0)). \end{aligned}$$

从 (ii) 以及 $t, t_0 \in \bar{I}_{k_0}$ 可得

$$\begin{aligned} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |s_j - t_j| &\leqslant |s - t| \leqslant M|\varphi(t) - x_0 - T(t - t_0)| \\ &\leqslant \frac{\delta|t - t_0|}{2n} \leqslant \frac{\delta}{2n}\sqrt{n} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |t_j - t_{0j}| \leqslant \frac{\delta\sigma}{2}. \end{aligned}$$

但 $s \in I'_{k_0}$, 由 (vii) 知 x 属于 (vi) 的右端, 故 (vi) 成立.

定理 5.33 设 $f(x)$ 是 V 上的非负连续函数, $K \subset U$ 是紧集, 则

$$\int_{\varphi(K)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_K f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{5.24}$$

证明 记 $g(t) = f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|$. 对每个整数 i, 令 G_i 是所有与 K 相交的 i 级二进方体 I 的并, 且满足

$$G_1 \supset G_2 \supset \cdots, \qquad \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i = K.$$

因为 K 是紧集且 U 是开集, 所以存在 $i_0 \geqslant 1$ 使得 $G_{i_0} \subset U$. 从而由引理 5.32 可知

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(K)} f(x)\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\varphi(G_i)} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{I \in G_i} \int_{\varphi(I)} f(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \sum_{I \in G_i} \int_I g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{G_i} g(t)\mathrm{d}t, \quad i \geqslant i_0. \end{aligned}$$

然而显然有

$$\lim_{i\to\infty}\int_{G_i} g(t)\mathrm{d}t = \int_K g(t)\,\mathrm{d}t.$$

从而可得

$$\int_{\varphi(K)} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_K g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.25}$$

为证上式反向不等式也成立，我们交换上式中 U 与 V 的位置，考虑 $\psi = \varphi^{-1}$ 换 φ, g 换 f 以及 $H = \varphi(K)$ 换 K. 根据逆映射定理，可知 $\psi: V \to U$ 是一对一的连续可微映射，J_φ 在 V 上不为零，$g(x)$ 是 U 上的非负连续函数且 H 是紧集. 于是类似于 (5.25)式可知

$$\int_{\varphi(H)} g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_H g(\psi(x))\,|J_\varphi(x)|\,\mathrm{d}x, \tag{5.26}$$

但 $\psi(H) = K$ 以及 $J_\varphi(\psi(x))J_\varphi(x) = 1$，因此有

$$g(\psi(x)) = f(x)\,|J_\varphi(\psi(x))| = f(x)\,|J_\varphi(x)|^{-1}.$$

代入 (5.26) 式即

$$\int_K g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\varphi(K)} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.27}$$

最后由 (5.25) 与 (5.27) 式可得 (5.24) 式.

定理 5.34 若 $E \subset U$ 是可测集，则

$$m(\varphi(E)) = \int_E |J_\varphi(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{5.28}$$

证明 设 $E = K \cup Z$.

$$m(Z) = 0, \qquad K = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i,$$

其中每个 K_i 都是紧集且有 $K_i \subset K_{i+1}$ $(i = 1, 2, \cdots)$. 从而引用 $f \equiv 1$ 的 (5.24) 式可得

$$\begin{aligned} m(\varphi(E)) &= m(\varphi(K)) = \lim_{i\to\infty} m(\varphi(K_i)) \\ &= \lim_{i\to\infty}\int_{K_i} |J_\varphi(t)|\,\mathrm{d}t = \int_E |J_\varphi(t)|\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

定理 5.35（积分换元公式） 设 $f(x)$ 是 V 上的可测函数，我们有

(i) $f[\varphi(t)]$ 是 U 上的可测函数；

(ii) $f\in L(V)$，当且仅当 $f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|$ 是 U 上的可积函数；

(iii) 若 $f\in L(V)$ 或 $f(x)\geqslant 0$，则

$$\int_V f(x)\mathrm{d}x=\int_U f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\mathrm{d}t. \tag{5.29}$$

证明 (i) 的证明是简明的. 对于 (ii) 与(iii),证明分两步:

(1) 若 $f(x)=\chi_F(x)$，F 是 V 中的可测集,记 $E=\psi(F)=\varphi^{-1}(F)$，则以 ψ 代替 φ，由 (5.28) 式可知，

$$\int_V f(x)\mathrm{d}x=m(F)=m(\varphi(E))=\int_E |J_\varphi(t)|\mathrm{d}t.$$

因为 $\chi_E(t)=\chi_{\varphi(E)}(\varphi(t))=f(\varphi(t))(t\in U)$，所以 (ii) 与 (iii) 成立;

(2) 由(1)可知,对于可测简单函数

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}c_i\chi_{F_i}(x),\quad x\in V,$$

(ii) 与 (iii) 是成立的. 现在设 $f(x)$ 是非负可测函数,且 $\{f_k(x)\}$ 是收敛于 $f(x)$ 的非负可测简单函数的渐升列，显然有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(\varphi(t))|J_\varphi(t)|=f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|,\quad t\in U.$$

从而可知

$$\begin{aligned}\int_V f(x)\mathrm{d}x&=\lim_{k\to\infty}\int_V f_k(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{k\to\infty}\int_U f_k(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\mathrm{d}t\\&=\int_U f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

例(球极坐标变量替换公式) 设变换 $\varphi:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ 表示如下:

$$x_1=r\cos\theta_1,$$

$$x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_j = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{j-1}\cos\theta_j, 2\leqslant j\leqslant n-1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1},$$

其中 $0\leqslant\theta_j<\pi(j=1,2,\cdots,n-2,),0\leqslant\theta_{n-1}\leqslant 2\pi, r=|x|$ 是向量 x 的长度. 记 $\boldsymbol{R}^n$ 中单位球面的向量为

$$\omega = (\cos\theta_1, \sin\theta_1\cos\theta_2, \cdots, \sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ \sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-1}),$$

知 $|\omega|=1$. 对应上述变换的行列式为 $r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\cdot\sin\theta_{n-2}$. 因此，若 $f\in L(\boldsymbol{R}^n)$，我们有变量替换公式:

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} r^{n-1}f(r\omega)\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2 \\ \times\sin^{n-4}\theta_3\cdots\sin\theta_{n-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1}. \tag{5.30}$$

我们记 $\boldsymbol{R}^n$ 中的单位球面为

$$\Sigma_n = \{\omega: 0\leqslant\theta_j<\pi, 0\leqslant\theta_{n-1}\leqslant 2\pi\ (j=1,2,\cdots,n-2)\},$$

而且

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\cdots\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1} = \int_{\Sigma_n}\cdots\mathrm{d}\omega_n.$$

现在考虑包含 Σ_n 中的开集的最小 σ-代数，当 A 是其中一元，即 Borel 集时，

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\chi_A(\omega)\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1} = \int_{\Sigma_n}\chi_A(\omega)\mathrm{d}\omega_n$$

以及

$$\omega_n(A) = \int_{\Sigma_n}\chi_A(\omega)\mathrm{d}\omega_n$$

就可被定义为在 Σ_n 上的 Borel 集的测度。我们称 ω_n 为 Σ_n 的面测度。从而在一般情形下，就有

$$\int_{R^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\Sigma_n}\int_0^\infty r^{n-1}f(r\omega)\mathrm{d}r\mathrm{d}\omega_n. \tag{5.31}$$

例 $\omega_n(\Sigma_n) = \int_{\Sigma_n}\mathrm{d}\omega_n = 2\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^{-1}$.

证明 作函数

$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|^2} = \mathrm{e}^{-x_1^2}\cdot\mathrm{e}^{-x_2^2}\cdot\cdots\cdot\mathrm{e}^{-x_n^2},$$

则

$$\int_{R^n}\mathrm{e}^{-|x|^2}\mathrm{d}x = \prod_{j=1}^n\left(\int_{R^1}\mathrm{e}^{-x_j^2}\mathrm{d}x_j\right) = \left(\int_{R^1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^n.$$

另一方面，又有

$$\int_{R^n}\mathrm{e}^{-|x|^2}\mathrm{d}x = \int_{\Sigma_n}\int_0^\infty r^{n-1}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\omega_n$$
$$= \omega_n(\Sigma_n)\int_0^\infty r^{n-1}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r.$$

由此推知

$$\omega_n(\Sigma_n) = \left(\int_{R^1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^n\left(\int_0^\infty r^{n-1}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\right)^{-1}$$
$$= 2\pi^{n/2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^{-1}.$$

注 关于积分的换元公式，Guzman 于 1980 年(见美国数学月刊)给出下述结果：

设 E 是 R^n 中的可测集，变换 $T:R^n\to R^n$ 满足下列条件：

(i) 存在逆变换 $T^{-1}:T(E)\to E$；

(ii) T 与 T^{-1} 各将 E 与 $T(E)$ 中的可测子集变为可测集；

(iii) $T(E)$ 的测度是有限的，

则存在一个 E 上的可积函数 J_T，使得当 $f\in L^1(T(E))$ 时，有 $f(T(x))\in L^1(E)$，而且

$$\int_{T(E)} f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(T(y))J_T(y)\mathrm{d}y$$

(证明要用到测度论中的 Radon-Nikodym 定理)。

习 题

1. 设 E 是 $\boldsymbol{R}^1$ 中一族(开、闭与半开闭)区间的并集，试证明 E 是可测集。

2. 设 $\{x_n\}\subset[a, b]$，试作 $[a,b]$ 上递增函数，其不连续点恰为 $\{x_n\}$。

3. 设 $f(x)$ 是 (a, b) 上的递增函数，$E\subset(a, b)$，若对任给 $\varepsilon>0$，存在 $(a_i,b_i)\subset(a,b)(i=1,2,\cdots)$，使得

$$\bigcup_i (a_i,b_i)\supset E, \qquad \sum_i [f(b_i)-f(a_i)]<\varepsilon.$$

试证明 $f'(x)=0$, a.e. $x\in E$.

4. (Fubini) 设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的单调上升函数，级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛，试证明

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad \text{a.e. } x\in[a,b].$$

5. 试在 $[0,1]$ 上作一严格单调上升函数 $f(x)$，使得

$$f'(x)=0, \quad \text{a.e. } x\in[0,1].$$

6. 设 $E\subset[a,b]$，试证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{m^*(E\cap[x-h, x+h])}{2h}=1, \text{ a.e. } x\in E.$$

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上是有界变差函数，试证明函数

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \qquad F(0)=0$$

是 $[0,a]$ 上的有界变差函数。

8. 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数列，且有

$$\bigvee_a^b (f_k) \leqslant M \quad (k=1,2,\cdots),$$

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \qquad x\in[a,b],$$

试证明 $f\in BV([a,b])$ 且满足 $\bigvee\limits_a^b (f)\leqslant M$.

9. 设 $f\in BV([a,b])$, $f_n\in BV([a,b])(n=1,2,\cdots)$, 且有

$$\lim_{n\to\infty} \bigvee_a^b (f-f_n) = 0,$$

试证明存在 $\{f_{n_i}(x)\}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} f'_{n_i}(x) = f'(x), \text{ a.e. } x\in[a,b].$$

10. 设 $f\in BV([a,b])$, 且点 $x_0\in[a,b]$ 是 $f(x)$ 的连续点，试证明 $\bigvee\limits_a^x (f)$ 在点 x_0 处连续.

11. 设 $f\in BV([a,b])$, 试证明存在 M, 当 $|h|$ 充分小时，有

$$\frac{1}{|h|}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx \leqslant M.$$

12. 设 $f\in L([0,1])$, $g(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的单调上升函数，若对任意的 $[a,b]\subset[0,1]$, 有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|^2 \leqslant [g(b)-g(a)](b-a),$$

试证明 $f^2(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可积函数.

13*. 设对任意的 $[a,b]\subset(\alpha,\beta)$, 以及充分小的 $|h|$, 有

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x \leqslant M|h|,$$

试证明 $f(x)=g(x)$, a.e. $x\in(\alpha,\beta)$, $g\in BV([a,b])$.

14. 设 $f(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^1$ 上的有界可测函数，且对于每一个 $t\in\boldsymbol{R}^1$

有 $f(x)=f(x-t)$, a.e. $x\in \boldsymbol{R}^1$，试证明存在常数 c，使得

$$f(x)=c,\quad \text{a.e.} \in \boldsymbol{R}^1.$$

*15. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负绝对连续函数，试证明 $f^p(x)$ $(p>1)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数。

16*. 试作$[0,1]$上的绝对连续函数 $f(x),g(x)$，使得

(i) $f(x)$ 严格递增，且 $f'(x)=0$ $(x\in E)$, $m(E)>0$;

(ii) $g(x)$ 不在任一区间上单调。

17. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增，且有

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a),$$

试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续。

18. 设 $f(x)$是 $\boldsymbol{R}^1$ 上有界的递增函数，且 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{R}^1$ 上可微。记

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=B,$$

试证明

$$\int_{\boldsymbol{R}^1} f'(x)\mathrm{d}x=B-A.$$

*19. 设 $f(x)$ 是定义在 $\boldsymbol{R}^1$ 上的可微函数，且 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 都是 $\boldsymbol{R}^1$ 上的可积函数。试证明：

$$\int_{\boldsymbol{R}^1} f'(x)\mathrm{d}x=0.$$

*20. 设 $f_k(x)(k=1,2,\cdots)$是定义在 $[a,b]$ 上的单调上升且绝对连续的函数，级数 $\sum\limits_{k\geq 1} f_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处收敛，试证明其和函数是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数。

21. 假设 $f(x,y)$ 是定义在 $[a,b]\times[c,d]$ 上的函数，且存在 $y_0\in(c,d)$，使得 $f(x,y_0)$ 在 $[a,b]$ 上是可积的；又对于每一个 $x\in[a,b]$, $f(x,y)$ 是对 y 在 $[c,d]$ 上的绝对连续函数，$f'_y(x,y)$ 在

$[a,b]\times[c,d]$ 上是可积的，试证明函数

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

是定义在 $[c,d]$ 上的绝对连续函数，且对几乎处处的 $y\in[c,d]$ 有

$$F'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)\mathrm{d}x.$$

22. 设 $E\subset[0,1]$. 若存在 $\alpha>0$，使得对于任意的 $0\leqslant a<b\leqslant 1$ 有 $m(E\cap[a,b])\geqslant\alpha(b-a)$，试证明 $m(E)=1$.

23. 假设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的单调上升的函数，试证明 f 可分解为：$f(x)=g(x)+h(x)\ (x\in[a,b])$，其中，$g(x)$ 是单调上升的并且绝对连续的函数，$h(x)$ 是单调上升函数而且

$$h'(x)=0,\ \text{a.e. } x\in[a,b].$$

24. 设 $f(x)$ 在任一区间 $[a,b]\subset\boldsymbol{R}^1$ 上都绝对连续，试证明对每个 $y\in\boldsymbol{R}^1$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x+y)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x+y)\mathrm{d}x.$$

25. 试举例说明绝对连续函数是几乎处处可微的这个结论一般是不能改进的.

*26. 设 $\{g_k(x)\}$ 是在 $[a,b]$ 上的绝对连续函数列，又有

$$|g'_k(x)|\leqslant F(x)\ \text{a.e.}\ (k=1,2,\cdots)\ 且\ F\in L([a,b]).$$

若 $\lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)=g(x)$，$\lim\limits_{k\to\infty}g'_k(x)=f(x)$，a.e.，试证明

$$g'(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in[a,b].$$

*27. 设 $\{f_n(x)\}$ 是支集含于 (a,b) 的连续可微函数列，且满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0=\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f'_n(x)-F(x)|\mathrm{d}x,$$

试证明：$F(x)=f'(x)$，a.e. $x\in[a,b]$.

28. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续严格递增函数，$g(y)$ 在

$[f(a), f(b)]$ 上绝对连续，试证明 $g[f(x)]$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

29. 设 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，$f(x)$ 在 $\boldsymbol{R}^1$ 上满足 Lipschitz 条件. 试证明 $f[g(x)]$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

30*. 设 $f(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^1$ 上的局部可积函数，满足

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y), \quad x,y\in \boldsymbol{R}^1,$$

试证明 $f(x)=e^{Bx}$，其中 B 是常数.

31*. 若 $f(x)$ 在 x_0 的邻域中，存在极限

$$\lim_{\substack{x_1\neq x_2\\(x_1,x_2)\to(x_0,x_0)}} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \triangleq \check{f}(x),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处强可微. 试证明如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中每一点上均强可微. 那末 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

32*. 试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是绝对连续的充分必要条件是：对任给 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$，使得对 $[a,b]$ 中的任何有限个互不相交的子区间 $[x_i,y_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(y_i)|\leqslant A\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|+\varepsilon.$$

33. 设 $f(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^1$ 上非负实值可测函数，$\varphi(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上递增，且在任一区间 $[0,a]$ $(a>0)$ 上绝对连续，又 $\varphi(0)=0$，令 $G_t=\{x:f(x)>t\}$，$t>0$. 试证明对 $\boldsymbol{R}^1$ 中任一可测集 E，有

$$\int_E \varphi[f(x)]\mathrm{d}x=\int_0^{\infty} m(E\cap G_t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

34. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差且连续的函数，对 $[a,b]$ 中任一零测集 e，有 $m(f(e))=0$，试证明 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

35*. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的单调上升函数，令 $E=\{x\in[a,b]:f'(x)$ 存在$\}$，试证明

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=m^*(f(E)).$$

36*. 设 $f:[a,b]\mapsto[c,d]$ 是连续函数，而且对任意的 $y\in[c,d]$，点集 $f^{-1}(y)$ 至多有 20 个点，试证明 $\bigvee_a^b(f)\leqslant 20(d-c)$.

37*. 设 $f\in C([a,b])$，试证明对一满足 $\lambda<\bigvee_a^b(f)$ 的 λ，必存在 $\delta>0$，使得 $[a,b]$ 的任一满足 $\|\Delta\|<\delta$ 的分划 Δ，有

$$v_\Delta>\lambda.$$

38. 设 $f\in C([a,b])$，$|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续，试问 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续吗?

39*. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的连续函数，除一可数集外，$f'(x)$ 存在，且 $f'(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数，试证明

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,\qquad x\in[a,b].$$

40*. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上严格递增的连续函数，$E=\{x\in[a,b],f'(x)=\infty\}$，试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续的充分必要条件是：$m(f(E))=0$.

41*. 试作一个在 $[0,1]$ 上严格递增的绝对连续函数 $f(x)$，使得 $f'(x)$ 在一个正测集上等于零。

42. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上递增的连续函数．若存在 $E\subset[a,b]$，$m(E)=0$，使得 $m(f(E))=f(b)-f(a)$，试证明

$$f'(x)=0,\quad \text{a.e. } x\in[a,b].$$

43*. 设 $f\in C([a,b])$，记 $E=\{x\in[a,b];D^+f(x)\leqslant 0\}$，若 $f(E)$ 无内点，试证明 $f(x)$ 递增。

第六章 $L^p(p\geqslant 1)$ 空间

通过前面各章的学习我们知道：连续(或几乎处处连续)函数及其相应的 Riemann 积分理论的地位和作用，在一定意义上已被可测函数及其 Lebesgue 积分理论所代替。新的积分理论不仅扩大了积分的对象，而且新的可积函数类的全体还呈现出与欧氏空间有极其类似的结构与性质，从而为我们在其上建立分析学奠定了基础。它的应用涉及到微分方程、积分方程、Fourier 分析等许多领域。

本章所介绍的 L^p 空间理论就是研究各种可积函数类的整体结构及其相互关系的。$L^p(1\leqslant p<\infty)$ 空间是 F. Riesz 于 1910 年导入的，他所使用的主要工具是 §6.1 中所述的 Hölder 不等式以及 Minkowski 不等式(这些不等式最初是用数列形式给出的，由 F. Riesz 把它们推广到积分形式)。Riesz 以及 Ficher 等人所研究的 L^p 空间的完备性结果，不仅在应用中占有重要地位，而且还为分析数学开辟出一条新路。掌握本章所介绍的内容将有助于学习泛函分析的理论。

§6.1 L^p 空间的定义与不等式

定义 6.1 (i) 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，记

$$\|f\|_p=\left(\int_E |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p},\quad 1\leqslant p<\infty.$$

我们用 $L^p(E)$ 表示使 $\|f\|_p<\infty$ 的 f 的全体，称其为 $L^p(1\leqslant p<\infty)$空间。($L^1(E)$ 就是第四章所说的 $L(E)$.)

(ii) 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，$m(E)>0$。若存在 M，使得 $|f(x)|\leqslant M$ a.e.，则对一切如此之M取下确界，记为 $\|f\|_\infty$，称

它为$|f(x)|$的本性上界。此时称$f(x)$为本性有界的。我们用$L^\infty(E)$表示在E上本性有界的函数之全体。

当$m(E)<\infty$时，可以证明

$$\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty.$$

事实上，若令$M=\|f\|_\infty$，则对任一满足$M'<M$的M'，点集

$$A=\{x\in E:|f(x)|>M'\}$$

有正测度。由不等式

$$\|f\|_p\geqslant\left(\int_A|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\geqslant M'(m(A))^{1/p}$$

可知，

$$\varliminf_{p\to\infty}\|f\|_p\geqslant M'.$$

令$M'\to M$，得

$$\varliminf_{p\to\infty}\|f\|_p\geqslant M.$$

另一方面，我们总有

$$\|f\|_p\leqslant\left(\int_E M^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}=M\cdot(m(E))^{1/p}.$$

从而又得

$$\varlimsup_{p\to\infty}\|f\|_p\leqslant M.$$

例 设$E=(0,1)$，我们有

$$\ln\frac{1}{x}\in L^p(E),\qquad \ln\frac{1}{x}\notin L^\infty(E);$$

$$x^{-1/p}\in L^{p-a}(E)\quad(0<a<p),\qquad x^{-1/p}\notin L^p(E);$$

$$x^{-1/p}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{-2/p}\notin L^{p+a}(E)\quad(a>0),$$

$$x^{-1/p}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{-2/p}\in L^p(E).$$

下述定理说明 $L^p(E)$ 构成一个线性空间。

定理6.1 若 $f,g\in L^p(E)$，α,β是实数，则

$$\alpha f+\beta g\in L^p(E).$$

证明 (i) 当$1\leqslant p<\infty$时，我们有

$$|\alpha f(x)+\beta g(x)|^p\leqslant 2^p(|\alpha|^p|f(x)|^p+|\beta|^p|g(x)|^p).$$

(ii) 当 $p=\infty$时，我们有

$$|\alpha f(x)+\beta g(x)|\leqslant|\alpha|\|f\|_\infty+|\beta|\|g\|_\infty \quad \text{a.e.},$$

从而可知$\|\alpha f+\beta g\|_\infty\leqslant|\alpha|\|f\|_\infty+|\beta|\|g\|_\infty$。

现在我们来介绍两个常用的著名不等式。

定义6.2(共轭指标) 若 $p,p'>1$，且$1/p+1/p'=1$，则称p与p'为共轭指标（数）．注意到$p'=p/(p-1)$，可知$p=2$时$p'=2$。若$p=1$，规定共轭指标$p'=\infty$；若$p=\infty$，规定共轭指标$p'=1$。

定理6.2(Hölder 不等式) 设p与p'为共轭指标，若$f\in L^p(E)$，$g\in L^{p'}(E)$，则有

$$\|fg\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_{p'},\quad 1\leqslant p\leqslant\infty, \tag{6.1}$$

即

$$\int_E|f(x)g(x)|\,dx\leqslant\left(\int_E|f(x)|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_E|g(x)|^{p'}dx\right)^{1/p'},$$

$$1<p<\infty,$$

以及（$p=\infty$即$p'=1$时类似）

$$\int_E|f(x)g(x)|\,dx\leqslant\|g\|_\infty\int_E|f(x)|\,dx,\ p=1.$$

证明 当p或p'之一为∞时，(6.1)式显然成立。

当$\|f\|_p=0$或$\|g\|_{p'}=0$时，此时我们有$f(x)g(x)=0$ a.e.，(6.1)式也显然成立。

当$\|f\|_p>0$，$\|g\|_{p'}>0$，且$p,p'<\infty$时，则在公式

$$a^{1/p}b^{1/p'} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{p'}, \quad a>0, b>0 ①$$

中，令

$$a = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}, \quad b = \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}}$$

可知，

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'}\frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}}.$$

将上式作积分，即得$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

Hölder 不等式的一个重要特例就是 Schwartz② 不等式，即 $p = p' = 2$的情形：

$$\int_E |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_E |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_E |g(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

注 Hölder 不等式对$\|f\|_p$或$\|g\|_{p'} = \infty$时也成立。

例 若 $m(E) < \infty$ 且 $p_1 < p_2 \leqslant \infty$，则 $L^{p_2}(E) \subset L^{p_1}(E)$ 且有

$$\|f\|_{p_1} \leqslant [m(E)]^{(1/p_1)-(1/p_2)} \|f\|_{p_2}. \qquad (6.2)$$

证明 不妨设$p_2 < \infty$。令 $r = p_2/p_1$，则$r > 1$。记r' 为 r 的共轭指标，则对 $f \in L^{p_1}(E)$，由(6.1)式可得

$$\int_E |f(x)|^{p_1}\,\mathrm{d}x = \int_E [|f(x)|^{p_1} \cdot 1]\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\int_E |f(x)|^{p_1 \cdot r}\mathrm{d}x\right)^{1/r}\left(\int_E 1^{r'}\mathrm{d}x\right)^{1/r'}$$

---

① 对于$(0,\infty)$上$f''(x) > 0$的函数$f(x)$，我们有

$$f(x) \leqslant \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b), \quad 0 < a < x < b,$$

令$f(x) = -\ln x$，$\theta = (b-x)/(b-a)$，则从$x = \theta a + (1-\theta)b$可知

$$-\ln(\theta a + (1-\theta)b) \leqslant \ln(a^{-\theta}b^{-(1-\theta)}),$$

即

$$a^\theta b^{1-\theta} \leqslant \theta a + (1-\theta)b.$$

② 1859 年俄国数学家 Буняковский 发现了这一不等式，但流传不广，后 Schwartz于1884年又独立地建立了这一不等式。

$$=(m(E))^{1/r'}\left(\int_E |f(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{1/r}.$$

从而可知

$$\left(\int_E |f(x)|^{p_1}\mathrm{d}x\right)^{1/p_1}$$

$$\leqslant (m(E))^{(1/p_1)-(1/p_2)}\left(\int_E |f(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{1/p_2}.$$

这就是(6.2)式。

例 若 $f\in L^r(E)\cap L^s(E)$，且令

$$0<\lambda<1,\quad \frac{1}{p}=\frac{\lambda}{r}+\frac{1-\lambda}{s},$$

则

$$\|f\|_p\leqslant\|f\|_r^{\lambda}\|f\|_s^{1-\lambda}.$$

事实上，当 $r<s<\infty$ 时，我们有

$$\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x=\int_E |f(x)|^{\lambda p}|f(x)|^{(1-\lambda)p}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\left(\int_E |f(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{\lambda p/r}$$

$$\times\left(\int_E |f(x)|^s\mathrm{d}x\right)^{(1-\lambda)p/s}.$$

当 $r<s=\infty$ 时，因为 $p=r/\lambda$，所以有

$$\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\|f^{p-r}\|_\infty\int_E |f(x)|^r\mathrm{d}x$$

$$=\|f\|_r^{r}\|f\|_\infty^{p(1-\lambda)}.$$

上述事实说明，当 $r<p<s\leqslant\infty$ 时，有

$$\|f\|_p\leqslant\max\{\|f\|_r,\|f\|_s\}.$$

定理6.3(Minkowski不等式) 若 $f,g\in L^p(E)(1\leqslant p\leqslant\infty)$，则

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p. \tag{6.3}$$

证明 当$p=1$时，(6.3)式显然成立；当$p=\infty$时，因为

$$|f(x)|\leqslant\|f\|_{\infty}\quad \text{a.e.},\qquad |g(x)|\leqslant\|g\|_{\infty}\quad \text{a.e.},$$

所以有

$$|f(x)+g(x)|\leqslant\|f\|_{\infty}+\|g\|_{\infty}\quad \text{a.e.},$$

从而可知$\|f+g\|_{\infty}\leqslant\|f\|_{\infty}+\|g\|_{\infty}$，(6.3)式成立

当$1<p<\infty$时，我们有

$$\begin{aligned}&\int_E|f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_E|f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|f(x)+g(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_E|f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|f(x)|dx\\&\quad+\int_E|f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|g(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

现在用Hölder不等式于上式右端第一个积分，对$|f(x)+g(x)|^{p-1}$与$|f(x)|$分别配指标$p'=p/(p-1)$与p，可得

$$\int_E|f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\|f+g\|_p^{p-1}\cdot\|f\|_p.$$

同理，对于上式右端第二个积分也可得

$$\int_E|f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|g(x)|dx\leqslant\|f+g\|_p^{p-1}\cdot\|g\|_p.$$

将上面两式代入前式，即有

$$\|f+g\|_p^p\leqslant\|f+g\|_p^{p-1}\cdot(\|f\|_p+\|g\|_p).$$

不妨设$\|f+g\|_p\neq0$，于是在上式两端用$\|f+g\|_p^{p-1}$除之，得

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p.$$

若$\|f+g\|_p=0$原式无所可证。

推论6.4 设$1\leqslant p\leqslant\infty$。若$f_k\in L^p(E)(k=1,2,\cdots)$，且级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$$

在E上几乎处处收敛，则

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p.$$

§6.2 L^p空间的性质(I)

(一) $L^p(E)$是完备的距离空间

为了便于在$L^p(E)$中引进距离，我们对$L^p(E)$空间的概念稍作一些改变，即认定当$f,g\in L^p(E)$，且$f(x)=g(x)$ a.e. 时，f与g是$L^p(E)$中的同一个元，或说用几乎处处相等作为等价关系把$L^p(E)$中的元分成等价类。例如在E上几乎处处等于零的函数全体是$L^p(E)$中的零元，于是我们有下述定理：

定理6.5 对于$f,g\in L^p(E)$，定义

$$d(f,g)=\|f-g\|_p,\quad 1\leqslant p\leqslant\infty,$$

则$(L^p(E),d)$是一个距离空间(定义见§1.4)。

证明 (i) 显然有$d(f,g)\geqslant 0$。因为$\|f-g\|_p=0$，当且仅当$f(x)=g(x)$ a.e.，所以$d(f,g)=0$，当且仅当$f=g$，即f与g是$L^p(E)$中的同一个元。

(ii) 显然有$d(f,g)=d(g,f)$。

(iii) 根据Minkowski不等式，我们有

$$\|f-g\|_p=\|f-h+h-g\|_p\leqslant\|f-h\|_p+\|g-h\|_p,$$

此即不等式$d(f,g)\leqslant d(f,h)+d(h,g)$。

有了距离，随之就可以定义极限的概念。

定义6.3 设$f_k\in L^p(E)(k=1,2,\cdots)$。若存在$f\in L^p(E)$，使得

$$\lim_{k\to\infty} d(f_k,f)=\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0,$$

则称$\{f_k\}$依L^p的意义收敛于f，$\{f_k\}$为$L^p(E)$中的收敛列，f为$\{f_k\}$的极限。

我们有下列简单事实：

(i) 唯一性。若

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k - f\|_p = 0, \quad \lim_{k\to\infty}\|f_k - g\|_p = 0,$$

则 $f = g(f(x) = g(x)$ a.e.)；

(ii) 若

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k - f\|_p = 0,$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k\|_p = \|f\|_p.$$

这是因为我们有

$$|\|f_k\|_p - \|f\|_p| \leqslant \|f_k - f\|_p.$$

定义6.4 设$\{f_k\} \subset L^p(E)$。若

$$\lim_{k,j\to\infty}\|f_k - f_j\|_p = 0,$$

则称$\{f_k\}$是$L^p(E)$中的基本(或 Cauchy)列。

显然，由于

$$\|f_k - f_j\|_p \leqslant \|f_k - f\|_p + \|f_j - f\|_p,$$

故知收敛列定为基本列。下述定理表明$L^p(E)$中的基本列定为收敛列，这一事实称为空间$L^p(E)$的完备性。

定理6.6 $L^p(E)$是完备的距离空间。

证明 $1 \leqslant p < \infty$。若$\{f_k\} \subset L^p(E)$满足

$$\lim_{k,j\to\infty}\|f_j - f_k\|_p = 0,$$

则对任给的$\sigma > 0$，令$E_{j,k}(\sigma) = \{x \in E: |f_j(x) - f_k(x)| \geqslant \sigma\}$时，就有

$$\begin{aligned}\sigma[E_{j,k}(\sigma)]^{1/p} &\leqslant \left[\int_{E_{j,k}(\sigma)} |f_j(x) - f_k(x)|^p \mathrm{d}x\right]^{1/p} \\ &\leqslant \left[\int_E |f_j(x) - f_k(x)|^p \mathrm{d}x\right]^{1/p} \\ &= \|f_j - f_k\|_p.\end{aligned}$$

这说明

$$\lim_{j,k\to\infty} E_{j,k}(\sigma)=0,$$

即$\{f_k(x)\}$在E上是依测度基本列。根据定理3.16，存在E上几乎处处有限的可测函数$f(x)$，使得$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$。由此又可选出(定理3.17)$\{f_k(x)\}$的子列$\{f_{k_i}(x)\}$，使得

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x)=f(x) \quad \text{a.e.}.$$

因为

$$\int_E |f_k(x)-f(x)|^p dx=\int_E \lim_{i\to\infty} |f_k(x)-f_{k_i}(x)|^p dx$$

$$\leqslant \varliminf_{i\to\infty}\int_E |f_k(x)-f_{k_i}(x)|^p dx,$$

所以我们有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|^p dx=0.$$

这说明

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0.$$

最后，由$\|f\|_p\leqslant\|f-f_k\|_p+\|f_k\|_p$，可知$f\in L^p(E)$。

$p=\infty$。设$\{f_k\}\subset L^\infty(E)$满足

$$\lim_{k,j\to\infty}\|f_k-f_j\|_\infty=0.$$

因为对于任一对自然数k与j有

$$|f_k(x)-f_j(x)|\leqslant\|f_k-f_j\|_\infty \quad \text{a.e.},$$

所以存在零测集Z，使得对于一切自然数k与j有

$$|f_k(x)-f_j(x)|\leqslant\|f_k-f_j\|_\infty, \quad x\bar{\in} Z.$$

从而存在$f(x)$，使得

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x), \quad x\in E\setminus Z,$$

易知$f\in L^\infty(E)$。

现在任给$\varepsilon>0$，取自然数N，使得

$$\|f_k-f_j\|_\infty<\varepsilon, \quad j,k>N.$$

由于当$k>N$且$x\in E\setminus Z$时有

$$|f_k(x)-f(x)| = \lim_{j\to\infty}|f_k(x)-f_j(x)| < \varepsilon,$$

故当$k>N$时有$\|f_k-f\|_\infty<\varepsilon$。这说明$\|f_k-f\|_\infty\to0(k\to\infty)$。

(二) L^p 空间的可分性

定义 6.5 设Γ是 $L^p(E)$ 中的子集，若对任意的$f\in L^p(E)$以及$\varepsilon>0$，存在$g\in\Gamma$，使得

$$\|f-g\|_p<\varepsilon,$$

则称Γ在 $L^p(E)$ 中稠密；若 $L^p(E)$ 中存在可数稠密子集，则称$L^p(E)$是可分的。

引理6.7 设 $f\in L^p(E)(1\leqslant p<\infty)$，则对任意的 $\varepsilon>0$，我们有

(i) 存在 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $g(x)$，使得

$$\int_E |f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon;$$

(ii) 存在 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的阶梯函数 φ：

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^k c_i\chi_{I_i}(x),$$

其中每个 I_i 都是二进方体，使得

$$\int_E|f(x)-\varphi(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon$$

(证明类似于第四章定理4.17，4.18，4.20)。

定理6.8 $L^p(E)(1\leqslant p<\infty)$是可分空间。

证明 首先设$E=\mathbf{R}^n$，$f\in L^p(\mathbf{R}^n)$，对任意的$\varepsilon>0$，由引理6.7可知，存在 $\mathbf{R}^n$ 上的阶梯函数 $\varphi(x)$，使得$\|f-\varphi\|_p<\varepsilon/2$，其中$\varphi(x)$如上引理所述：

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^k c_i\chi_{I_i}(x).$$

不妨设 $|c_i|<M$，$m(I_i)\leqslant M^p(i=1,2,\cdots,k)$，现在对每一个 i，选取有理数 r_i，使得$|r_i|<M$且有

$$|c_i-r_i|<\frac{\varepsilon}{2kM},\quad i=1,2,\cdots,k,$$

并令

$$\psi(x)=\sum_{i=1}^{k} r_i \chi_{I_i}(x).$$

我们有

$$\|\varphi-\psi\|_p=\left\|\sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{I_i}-\sum_{i=1}^{k} r_i \chi_{I_i}\right\|_p \leqslant \sum_{i=1}^{k}\|c_i \chi_{I_i}-r_i \chi_{I_i}\|_p$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k}|c_i-r_i|\|\chi_{I_i}\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2kM} \sum_{i=1}^{k}(m(I_i))^{1/p}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2kM} \cdot kM=\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而可得

$$\|f-\psi\|_p \leqslant \|f-\varphi\|_p+\|\varphi-\psi\|_p<\varepsilon.$$

因为形如ψ之阶梯函数全体Γ是可数集，所以Γ是$L^p(R^n)$中的可数稠密集。

其次考虑一般可测集E。设$f \in L^p(E)$，作函数$f_1(x)=f(x)$ $(x \in E)$，$f_1(x)=0(x \overline{\in} E)$，显然有$f_1 \in L^p(R^n)$。从而对任给的$\varepsilon>0$，存在$g \in \Gamma$，使得

$$\left(\int_{R^n}|f_1(x)-g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}<\varepsilon.$$

由此立即可得

$$\left(\int_E|f(x)-g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}<\varepsilon.$$

现在若将Γ中的每一个函数的定义域限制在E上，并记其全体为Γ'，则Γ'是$L^p(E)$中的可数稠密集。

推论 6.9 若$1 \leqslant p<\infty$，$1 \leqslant r \leqslant \infty$，则$L^p(E) \cap L^r(E)$在$L^p(E)$中稠密。

注意，$L^\infty(E)(m(E)>0)$是不可分的。例如对$L^\infty((0,1))$（一般情形请读者讨论），我们研究函数族：

$$f_t(x)=\chi_{(0,t)}(x),\quad 0<t<1.$$

显然，它们的全体是不可数的，但我们有

$$\|f_t-f_{t'}\|_\infty=1,\quad t\neq t'.$$

根据上面结果，我们可以立即推得下述类似于 $L^1(\mathbf{R}^n)$的(见第四章)结论，证明从略。

定理6.10 若 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)(1\leqslant p<\infty)$，则有

$$\lim_{t\to0}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x+t)-f(x)|^p\mathrm{d}x=0. \tag{6.4}$$

例 若 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)(1\leqslant p<\infty)$，则

$$\lim_{|t|\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)+f(x-t)|^p\mathrm{d}x=2\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x.$$

事实上，对任给的$\varepsilon>0$，作分解：

$$f(x)=g(x)+h(x),$$

其中 $g(x)$是$\mathbf{R}^n$上具有紧支集的连续函数，而$\|h\|_p<\varepsilon/4$。显然，存在 $M>0$，当$|t|\geqslant M$时，$g(x)$与 $g(x-t)$ 的支集不相交。从而有

$$\int_{\mathbf{R}^n}|g(x)+g(x-t)|^p\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}|g(x)|^p\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^n}|g(x-t)|^p\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{\mathbf{R}^n}|g(x)|^p\mathrm{d}x.$$

由分解式可知$|\|f\|_p-\|g\|_p|\leqslant\|h\|_p<\varepsilon/4$。又由

$$f(x)+f(x-t)=[g(x)+g(x-t)]+[h(x)+h(x-t)],$$

以及令 $f_t(x)=f(x-t)$，可得

$$|\|f+f_t\|_p-\|g+g_t\|_p|\leqslant\|h+h_t\|_p\leqslant2\|h\|_p<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而当$|t|\geqslant M$时有

$$|\|f+f_t\|_p-2^{1/p}\|g\|_p|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

最后我们得到

$$
\begin{aligned}
&\left|\|f+f_t\|_p-2^{1/p}\|f\|_p\right| \\
&\quad\leqslant\left|\|f+f_t\|_p-2^{1/p}\|g\|_p\right|+\left|2^{1/p}\|g\|_p-2^{1/p}\|f\|_p\right| \\
&\quad<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

§6.3 L^2 空间

在 L^p空间中，当 $p=2$ 时其共轭指标 $p'=2$。从而可知当 $f,g\in L^2$时，有$fg\in L^1$。这一简单事实使 L^2 增添了新的重要结构，从而显示出它在 L^p 中的特定地位。L^2 在 Fourier 分析、特征展开，数学物理的许多课题中都有重要的应用。

（一）内积．正交系

我们知道，在平面上两个向量$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$的夹角 θ 与它们的内积有如下关系：

$$\cos\theta=\frac{\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle}{\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{B}\|},$$

其中$\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle$是$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$的内积，$\|\boldsymbol{A}\|$表示向量$\boldsymbol{A}$的长度．当$\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle=0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 就垂直．由此可以建立直角坐标系（基底）．我们的目的是想在 L^2 中建立类似的结构．注意到

$$\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\rangle=\|\boldsymbol{A}\|^2,$$

于是对于 $f,g\in L^2(E)$，我们记

$$\langle f,g\rangle\doteq\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

由此，Schwartz 不等式可写为

$$|\langle f,g\rangle|\leqslant\|f\|_2\cdot\|g\|_2.$$

显然，$\langle f,g\rangle$满足下列内积所要求的性质：

(i) $\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle$；

(ii) $\langle f_1+f_2,g\rangle=\langle f_1,g\rangle+\langle f_2,g\rangle$；

(iii) $\langle af,g\rangle=a\langle f,g\rangle\doteq\langle f,ag\rangle$（$a$ 是实数）．

我们称$\langle f,g\rangle$为 f 与 g 的内积．

定理6.11(内积的连续性) 若在 $L^2(E)$ 中有

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_2=0,$$

则对任意的 $g\in L^2(E)$ 有

$$\lim_{k\to\infty}\langle f_k,g\rangle=\langle f,g\rangle. \tag{6.5}$$

证明 由不等式

$$|\langle f_k,g\rangle-\langle f,g\rangle|=|\langle f_k-f,g\rangle|\leqslant\|f_k-f\|_2\cdot\|g\|_2$$

立即可知(6.5)式成立。

定义6.6 若 $f,g\in L^2(E)$ 且 $\langle f,g\rangle=0$，则称 f 与 g 正交；若 $\{\varphi_\alpha\}\subset L^2(E)$ 中任意的两个元都正交，则称 $\{\varphi_\alpha\}$ 是正交系；若还有 $\|\varphi_\alpha\|_2=1$（一切 α），则称 $\{\varphi_\alpha\}$ 为规一化（标准）正交系.

若在正交系 $\{\varphi_\alpha\}\subset L^2(E)$ 中，对一切 α 都有 $\|\varphi_\alpha\|\neq0$，则 $\{\varphi_\alpha/\|\varphi_\alpha\|_2\}$ 就是规一化正交系。以下我们总假定对一切 α，

$$\|\varphi_\alpha\|_2\neq0.$$

例 $L^2[-\pi,\pi]$ 中的三角函数列：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \cdots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx,\quad \cdots$$

是规一化正交系。

定理6.12 $L^2(E)$ 中任一规一化正交系都是可数的。

证明 设 $\{\varphi_\alpha\}$ 是 $L^2(E)$ 中的规一化正交系，则对于 $\alpha\neq\beta$ 有

$$\begin{aligned}\|\varphi_\alpha-\varphi_\beta\|_2^2&=\langle\varphi_\alpha-\varphi_\beta,\varphi_\alpha-\varphi_\beta\rangle\\&=\langle\varphi_\alpha,\varphi_\alpha\rangle+\langle\varphi_\beta,\varphi_\beta\rangle=2.\end{aligned}$$

从而可知 $\|\varphi_\alpha-\varphi_\beta\|_2^2=2$。因为 $L^2(E)$ 是可分空间，所以存在可数稠密集，又每个 $\|\varphi_\alpha\|\neq0$，因而 $\{\varphi_\alpha\}$ 是可数的。

(二) 广义Fourier 级数

我们知道，在 R^n 中，当 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是一组单位正交向量时，则任一向量 $A\in R^n$ 可唯一地表示为

$$A = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n,$$

其中$c_k = \langle A, e_k \rangle (k = 1,2,\cdots,n)$。下面我们把这一事实推广于$L^2$空间。

设$\{\varphi_i\}$是$L^2(E)$中的一个规一化正交系，如果以级数形式

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x)$$

来表示$L^2(E)$中的某个元时，那末必须讨论上述级数是否收敛的问题。这里指的是在L^2中的收敛。

现在令

$$S_k(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i(x).$$

若在$k \to \infty$时有$\|S_k - f\|_2 \to 0$，则

$$\langle f, \varphi_j \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle S_k, \varphi_j \rangle = \lim_{k\to\infty} \left\langle \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i, \varphi_j \right\rangle$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} c_i \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = c_j, \quad j = 1,2,\cdots.$$

这一分析导出下述定义：

定义 6.7 设$\{\varphi_k\}$是$L^2(E)$中的规一化正交系，$f \in L^2(E)$，我们称

$$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle = \int_E f(x) \varphi_k(x) \mathrm{d}x, \quad k = 1,2,\cdots$$

为f(关于$\{\varphi_k\}$)的广义 Fourier 系数，称

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

为f的(关于$\{\varphi_k\}$的)广义 Fourier 级数，简记为

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k.$$

在研究此级数是否收敛于$f(x)$之前，我们先来介绍关于广义

Fourier 级数的几个重要事实。

定理6.13 设$\{\varphi_i\}$是$L^2(E)$中的规一化正交系，$f\in L^2(E)$，取定k，作

$$f_k(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i\varphi_i(x),$$

其中$a_i(i=1,2,\cdots,k)$是实数，则当$a_i=c_i=\langle f,\varphi_i\rangle\ (i=1,2,\cdots,k)$时，使得$\|f-f_k\|_2$达到最小值。

证明 由$\{\varphi_i\}$的正交与规一性可知

$$\|f_k\|_2^2=\langle f_k,f_k\rangle=\sum_{i=1}^{k}a_i^2.$$

从而得

$$\begin{aligned}\|f-f_k\|_2^2&=\left\langle f-\sum_{i=1}^{k}a_i\varphi_i,f-\sum_{i=1}^{k}a_i\varphi_i\right\rangle\\&=\|f\|_2^2-2\sum_{i=1}^{k}a_ic_i+\sum_{i=1}^{k}a_i^2\\&=\|f\|_2^2+\sum_{i=1}^{k}(c_i-a_i)^2-\sum_{i=1}^{k}c_i^2.\end{aligned}$$

由此可见，当$a_i=c_i(i=1,2,\cdots,k)$时，$\|f-f_k\|_2^2$达到最小值，且最小值为

$$\|f\|_2^2-\sum_{i=1}^{k}c_i^2.$$

此外，若令

$$S_k(x)=\sum_{i=1}^{k}c_i\varphi_i(x),$$

则有

$$\|f-S_k\|_2^2=\|f\|^2-\sum_{i=1}^{k}c_i^2.$$

定理 6.14(Bessel不等式) 设$\{\varphi_k\}$是$L^2(E)$中的规一化正交系，且$f\in L^2(E)$，则$f(x)$的广义 Fourier 系数$\{c_k\}$满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|_2^2. \tag{6.6}$$

证明 从上述定理可知，对任意的k有

$$\|f\|_2^2 - \sum_{i=1}^{k} c_i^2 = \|f - S_k\|_2^2 \geqslant 0.$$

从而有

$$\sum_{i=1}^{k} c_i^2 \leqslant \|f\|_2^2.$$

令$k \to \infty$，即得

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|_2^2.$$

定理6.15(Riesz-Fischer定理) 设$\{\varphi_k\}$是$L^2(E)$中的规一化正交系，若$\{c_k\}$是满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$$

的任一实数列，则存在$f \in L^2(E)$，使得

$$\langle f, \varphi_k \rangle = c_k, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

证明 作函数

$$S_k(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i(x),$$

显然有

$$\|S_{k+p} - S_k\|_2^2 = \left\| \sum_{i=k+1}^{k+p} c_i \varphi_i \right\|_2^2 = \sum_{i=k+1}^{k+p} c_i^2.$$

由此可知$\{S_k\}$是$L^2(E)$中的基本列。根据$L^2(E)$的完备性，存在$f \in L^2(E)$，使得

$$\lim_{k \to \infty} \|f - S_k\|_2 = 0.$$

由此知$\langle f, \varphi_k \rangle = c_k (k = 1, 2, \cdots)$.

由上两定理可知，$L^2(E)$ 中的元 f 的广义 Fourier 级数总是在 L^2 中收敛于某个$g\in L^2$，但是 g 不一定是 f，例如

$$\varphi_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx,\quad k=1,2,\cdots$$

是 $L^2(-\pi,\pi)$中的规一化正交系，但对于 $f(x)=\cos x$，我们有 $c_k=\langle f,\varphi_k\rangle=0(k=1,2,\cdots)$，因此得

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k-f\right\|_2=\|f\|_2\neq 0.$$

这一情形类似于三维欧氏空间中只取两个正交向量组成正交系但不组成正交基一样，使得不同的向量可能具有相同的坐标。为排除这一情形，我们引入下述完全系的概念。

定义6.8 设$\{\varphi_k\}$是$L^2(E)$中的正交系，若 $L^2(E)$中不再存在非零元能与一切 φ_k 正交，则称此$\{\varphi_k\}$是 L^2 中的完全系。换句话说，若$f\in L^2(E)$且$\langle f,\varphi_k\rangle=0(k=1,2,\cdots)$，则必有$f(x)=0$ a.e.。

定理6.16 设$\{\varphi_k\}$是 $L^2(E)$中的规一化的完全系，$f\in L^2(E)$，令 $c_k=\langle f,\varphi_k\rangle(k=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{k}c_i\varphi_i-f\right\|_2=0. \tag{6.7}$$

证明 假定

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{k}c_i\varphi_i-g\right\|_2=0,\quad g\in L^2(E),$$

则$\langle g,\varphi_i\rangle=c_i,(i=1,2,\cdots)$，从而可知

$$\langle f-g,\varphi_i\rangle=\langle f,\varphi_i\rangle-\langle g,\varphi_i\rangle=0,\quad i=1,2,\cdots.$$

因为$\{\varphi_i\}$是完全系，所以由定义知

$$f(x)-g(x)=0\quad \text{a.e.}.$$

这说明(6.7)式成立。

例(三角函数系是完全系) 设 $E=[-\pi,\pi]$，则三角函数系

$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cdots,\ \cos kx,\ \sin kx,\ \cdots$

是 $L^2(E)$中的完全系。

证明 (i) 设$f(x)$是$[-\pi,\pi]$上的连续函数。若其一切Fourier 系数都是零，则$f(x)\equiv 0$。

事实上，如果 $f(x)\not\equiv 0$,那末存在 $x_0\in[-\pi,\pi]$,使得$|f(x_0)|$为最大值.不妨设$f(x_0)=M>0$,从而可取到充分小的区间 $I=(x_0-\delta,x_0+\delta)$，使得

$$f(x)>\frac{1}{2}M,\qquad x\in I\cap[-\pi,\pi].$$

现在，研究三角多项式：

$$t(x)=1+\cos(x-x_0)-\cos\delta.$$

因为$t^n(x)$仍是一个三角多项式，所以根据假定我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)t^n(x)\mathrm{d}x=0,\qquad n=1,2,\cdots.$$

但这是不可能的。一方面,因为当$x\in[-\pi,\pi]\setminus I$时有$|t^n(x)|\leqslant 1$,所以

$$\int_{[-\pi,\pi]\setminus I}f(x)t^n(x)\mathrm{d}x\leqslant M\cdot 2\pi.$$

另一方面，因为令$J=(x_0-\delta/2,x_0+\delta/2)$时，存在 $r>1$，使得

$$t(x)\geqslant r,\qquad x\in J\cap[-\pi,\pi],$$

所以

$$\int_{I\cap[-\pi,\pi]}f(x)t^n(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{J\cap[-\pi,\pi]}f(x)t^n(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}Mr^n\frac{\delta}{2}.$$

合并上述两个积分不等式，得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)t^n(x)\mathrm{d}x=\infty.$$

上述矛盾说明必须 $f(x)\equiv 0$。

(ii) 设$f\in L^2(E)$。我们作函数

$$g(x)=\int_{-\pi}^{x}f(t)\mathrm{d}t.$$

因为 $g(x)$是$[-\pi,\pi]$上的绝对连续函数且 $g(-\pi)=g(\pi)=0$，所以通过分部积分公式可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\begin{pmatrix}\sin kx\\ \cos kx\end{pmatrix}dx$$

$$= g(x)\begin{pmatrix}-\cos kx\\ \sin kx\end{pmatrix}\frac{1}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\begin{pmatrix}-\cos kx\\ \sin kx\end{pmatrix}dx = 0,$$

$k \geqslant 1$. 现在令

$$B = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx, \qquad G(x) = g(x) - B,$$

我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\begin{pmatrix}\cos kx\\ \sin kx\end{pmatrix}dx = 0, \qquad k = 0,1,2,\cdots,$$

即 $G(x)$ 的一切 Fourier 系数都是零。由(i)知 $G(x) \equiv 0$，即 $g(x) \equiv B$。从而可知

$$f(x) = g'(x) = 0 \quad \text{a.e.} \quad .$$

我们知道，在欧氏空间中有线性无关向量组的概念，并可由它们导出正交向量组，而极大线性无关向量组构成空间的基底，其个数就是空间的维数。从这一角度出发，我们引入下述定义。

定义 6.9 设 $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_k(x)$ 是定义在 E 上的函数。如果从

$$a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x) + \cdots + a_k\psi_k(x) = 0 \quad \text{a.e.}$$

可推出 $a_i = 0 (i = 1,2,\cdots,k)$，那末称函数 $\psi_i (i = 1,2,\cdots,k)$ 是线性无关的；对于由无限多个函数组成的函数系，如果其中任意有限个函数都是线性无关的，那末称此函数系是线性无关的(显然，线性无关函数系中不存在几乎处处等于零的函数)。

例 $L^2(E)$ 中的正交系 $\{\varphi_k\}$ 一定是线性无关的。

事实上，若在 $\{\varphi_k\}$ 中任取有限个并假定

$$a_1\varphi_{k_1}(x) + a_2\varphi_{k_2}(x) + \cdots + a_i\varphi_{k_i}(x) = 0 \quad \text{a.e.},$$

则在上式两端各乘以 $\varphi_{k_1}(x)$，且在 E 上对 x 进行积分，由 $\{\varphi_k\}$

的正交性可知 $a_1=0$。同理可证 $a_2=a_3=\cdots=a_i=0$。

当然，一个线性无关的函数系不一定是正交系。不过，我们可以在此函数系的基础上建立起正交系来，这就是下面所讲的 Gram-Schmidt 正交化方法：

设$\{\psi_k\}$是 $L^2(E)$中的线性无关系，令

$$\varphi_1(x)=\psi_1(x), \qquad \varphi_2(x)=-\frac{<\psi_2,\varphi_1>}{\|\varphi_1\|_2^2}\varphi_1(x)+\psi_2(x).$$

一般来说，在取定$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{k-1}$时，令

$$\varphi_k(x)=a_{k,1}\varphi_1(x)+a_{k,2}\varphi_2(x)+\cdots+a_{k,k-1}\varphi_{k-1}(x)+\psi_k(x),$$

其中

$$a_{k,i}=-\frac{<\psi_k,\varphi_i>}{\|\varphi_i\|_2^2}, \qquad i=1,2,\cdots,k-1.$$

易知这样所得的$\{\varphi_k\}(k=1,2\cdots)$是正交的.

由于 $L^2(E)$中存在可数稠密集 Γ，若将 Γ 中线性无关的向量选出来，再进行上述正交化过程，就可得到一个正交系。

定理6.17 设$\{\varphi_i\}$是 $L^2(E)$中的规一化正关系，若对任意的 $f\in L^2(E)$以及 $\varepsilon>0$，存在$\{\varphi_i\}$中的线性组合

$$g(x)=\sum_{j=1}^{k}a_j\cdot\varphi_{i_j}(x),$$

使得$\|f-g\|_2<\varepsilon$，则$\{\varphi_i\}$是完全系.

证明 假定$\{\varphi_i\}$不是完全系，则存在非零元 $f\in L^2(E)$，使得$<f,\varphi_i>=0(i=1,2,\cdots)$。因为$\|f\|_2>0$，所以根据假定，存在数组 $a_1,a_2,\cdots,a_k$，使得

$$\left\|f-\sum_{j=1}^{k}a_j\varphi_{i_j}\right\|_2<\frac{\|f\|_2}{2}.$$

从而得

$$\left|<f,f-\sum_{j=1}^{k}a_j\varphi_{i_j}>\right|\leqslant\|f\|_2\left\|f-\sum_{j=1}^{k}a_j\varphi_{i_j}\right\|_2<\frac{\|f\|_2^2}{2}.$$

另一方面，由于$<f,\varphi_i>=0(i=1,2,\cdots)$，故

$$\left|<f,f-\sum_{j=1}^{k}a_j\varphi_{i_j}>\right|=\left|<f,f>-\sum_{j=1}^{k}a_j<f,\varphi_{i_j}>\right|=\|f\|_2^2.$$

这一矛盾说明$\{\varphi_i\}$是完全系。

§6.4* L^p 空间的性质(Ⅱ)

(一)关于 L^p 的范数 $\|\cdot\|_p$

如果在 Hölder 不等式

$$\left|\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\|f\|_p\|g\|_{p'}$$

中，取$\|g\|_{p'}=1$，则有

$$\left|\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\|f\|_p.$$

那末是否存在 $g\in L^{p'}(E)$ 且 $\|g\|_{p'}=1$，使得上式等号成立呢？我们有下述结论：

定理6.18 若 $f\in L^p(E)$，$(1\leqslant p<\infty)$，则存在 $g\in L^{p'}(E)$ 且$\|g\|_{p'}=1$，使得

$$\|f\|_p=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x. \tag{6.8}$$

证明 (i) $p=1$。此时令 $g(x)=\mathrm{sign}\,f(x)$，则 $\|g\|_\infty=1$，且有

$$\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_E|f(x)|\mathrm{d}x=\|f\|_1.$$

(ii) $1<p<\infty$。此时不妨设$\|f\|_p\neq0$，令

$$g(x)=\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^{p-1}\cdot\mathrm{sign}\,f(x),$$

则有

$$\int_E |g(x)|^{p'}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\|f\|_p^p}\int_E |f(x)|^p\,\mathrm{d}x = 1,$$

而且

$$\int_E f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^{p-1}\mathrm{d}x = \|f\|_p.$$

对于 $p=\infty$，我们有下述定理。

定理6.19 若 $f\in L^\infty(E)$，则有

$$\|f\|_\infty = \sup_{\|g\|_1=1}\left\{\left|\int_E f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|\right\}.$$

证明 令 $\|f\|_\infty = M>0$。从而只需证明对充分小的 $\varepsilon>0$，存在 $g\in L^1(E)$ 且 $\|g\|_1=1$，使得

$$\int_E f(x)g(x)\,\mathrm{d}x > M-\varepsilon$$

即可。因为 $\|f\|_\infty = M$，所以对 $M-\varepsilon$，存在 E 中的子集 A，并且 $m(A)=a>0$，使得

$$|f(x)|>M-\varepsilon, \qquad x\in A.$$

现在令

$$g(x)=\frac{1}{a}\chi_A(x)\,\mathrm{sign}\,f(x),$$

可知
$$\|g\|_1=\int_E |g(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_E \chi_A(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

而且

$$\int_E f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_E f(x)\chi_A(x)\,\mathrm{sign}\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a}\int_A |f(x)|\,\mathrm{d}x > M-\varepsilon.$$

注意，若令 $E=[0,1]$，$f(x)=x$，则 $\|f\|_\infty=1$，此时，对于任意的 $g\in L^1(E)$ 且 $\|g\|_1=1$ 有

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1 x|g(x)|\mathrm{d}x<\int_0^1|g(x)|\mathrm{d}x=1.$$

这说明对于 $p=\infty$，$f\in L^p(E)$，不一定存在 $g\in L^1(E)$ 且 $\|g\|_1=1$，使得

$$\|f\|_\infty=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

下述定理在一定意义上是 Hölder 不等式的逆命题。

定理6.20 设 $g(x)$是E上的可测函数，若存在$M>0$，使得对一切在E上可积的简单函数 $\varphi(x)$，都有

$$\left|\int_E g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M\|\varphi\|_p,$$

则$g\in L^{p'}(E)$（p'是p的共轭指标）且$\|g\|_{p'}\leqslant M$。

证明 (i) $p>1$。对于$|g(x)|^{p'}$，作具有紧支集的非负可测简单函数渐升列$\{\varphi_k(x)\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=|g(x)|^{p'},\quad x\in E.$$

现在令

$$\psi_k(x)=[\varphi_k(x)]^{1/p}\mathrm{sign}\, g(x),$$

则得

$$\|\psi_k\|_p=\left(\int_E\varphi_k(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

注意到

$$0\leqslant\varphi_k(x)=[\varphi_k(x)]^{1/p}[\varphi_k(x)]^{1/p'}\leqslant[\varphi_k(x)]^{1/p}|g(x)|$$
$$=\psi_k(x)g(x).$$

从而根据假设可得

$$\int_E\varphi_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E\psi_k(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\|\psi_k\|_p.$$

由此可知

$$\int_E \varphi_k(x)\mathrm{d}x \leqslant M^{p'}.$$

令 $k\to\infty$，我们有

$$\int_E |g(x)|^{p'}\mathrm{d}x \leqslant M^{p'}.$$

(ii) $p=1$。不妨设 $g(x)\geqslant 0$。采用反证法。若 $g\bar{\in} L^\infty(E)$，则存在 E 中的可测集列 $\{A_k\}$，$\infty > m(A_k) > 0 (k=1,2,\cdots)$，使得

$$g(x)\geqslant k,\quad x\in A_k,\quad k=1,2,\cdots.$$

令

$$\varphi_k(x)=\chi_{A_k}(x),\quad k=1,2,\cdots,$$

则有

$$\frac{\int_E \varphi_k(x)g(x)\mathrm{d}x}{\|\varphi_k\|_1}\geqslant \frac{km(A_k)}{m(A_k)}=k,\quad k=1,2,\cdots.$$

这与定理的假设矛盾。

(二) 卷积

在第四章中我们指出，若 $f,g\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，则卷积

$$f*g\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$$

且有

$$\|(f*g)\|_1\leqslant \|f\|_1\|g\|_1.$$

现在考虑在 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 中的情形。

定理6.21 设 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，$g\in L^p(\boldsymbol{R}^n)(1<p<\infty)$，则

$$\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_1\|g\|_p. \text{（Young 不等式）} \tag{6.9}$$

证明 令 p' 为 p 的共轭指标，在不等式

$$|(f*g)(x)|\leqslant\int_{R^n}|f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}y$$

$$=\int_{R^n}|f(x-y)|^{1/p}|g(y)||f(x-y)|^{1/p'}\mathrm{d}y$$

的右端用 Hölder 不等式，可得

$$|(f*g)(x)|$$

$$\leqslant\left[\int_{R^n}|f(x-y)|\,|g(y)|^p\mathrm{d}y\right]^{1/p}\left[\int_{R^n}|f(x-y)|\mathrm{d}y\right]^{1/p'}.$$

对上式两端 p 乘方后再对 x 作积分，根据 Fubini 定理可知

$$\int_{R^n}|(f*g)(x)|^p\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\|f\|_1^{p/p'}\int_{R^n}\left[\int_{R^n}|f(x-y)||g(y)|^p\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\|f\|_1^{p/p'}\int_{R^n}|g(y)|^p\left[\int_{R^n}|f(x-y)|\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=\|f\|_1^{(p/p')+1}\|g\|_p^p=\|f\|_1^p\|g\|_p^p.$$

从而(6.9)式成立。

上述定理表明，当 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，$g\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$时卷积(函数)$(f*g)(x)$是属于 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$的。下面我们来考虑用卷积函数形式给出 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$中的稠密集。由于卷积本身的构成明显地含有 g，可以预料它在应用上有某种优越性。

引理6.22(广义 Minkowski 不等式) 设 $f(x,y)$是 $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$ 上的可测函数，若对几乎处处的 $y\in\boldsymbol{R}^n$，$f(x,y)$属于 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ $(1\leqslant p<\infty)$，且有

$$\int_{R^n}\left[\int_{R^n}|f(x,y)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\mathrm{d}y=M<\infty,$$

则

$$\left[\int_{R^n}\left|\int_{R^n}f(x,y)\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\leqslant\int_{R^n}\left[\int_{R^n}|f(x,y)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p}\mathrm{d}y. \tag{6.10}$$

证明 不妨设 $p>1$，p'是 p 的共轭指标，并令

$$F(x)=\int_{R^n}|f(x,y)|\mathrm{d}y.$$

现在，对于任意的可积简单函数 $\varphi(x)$，我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_{R^n}F(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_{R^n}|F(x)\varphi(x)|\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_{R^n}\left[\int_{R^n}|f(x,y)|\,\mathrm{d}y\right]|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{R^n}\left[\int_{R^n}|f(x,y)|\,|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\ &\leqslant \int_{R^n}\left[\int_{R^n}|f(x,y)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_{R^n}|\varphi(x)|^{p'}\,\mathrm{d}x\right]^{1/p'}\mathrm{d}y\\ &= M\cdot\|\varphi\|_{p'}.\end{aligned}$$

根据定理6.20可知$\|F\|_p\leqslant M$，即

$$\left\{\int_{R^n}\left|\int_{R^n}f(x,y)\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\leqslant\int_{R^n}\left[\int_{R^n}|f(x,y)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\mathrm{d}y.$$

定义6.10 设 $K(x)$是定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数，$\varepsilon>0$，令

$$K_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)=\varepsilon^{-n}K\left(\frac{x_1}{\varepsilon},\frac{x_2}{\varepsilon},\cdots,\frac{x_n}{\varepsilon}\right),$$

我们称 $K_\varepsilon(x)$为 $K(x)$的展缩函数。

例 设 $K(x)=\chi_{B(0,1)}(x)$，则有

$$K_\varepsilon(x)=\begin{cases}\varepsilon^{-n}, & |x|<\varepsilon,\\ 0, & |x|\geqslant\varepsilon.\end{cases}$$

我们有下列简单事实：设 $K\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，则

(i) $\displaystyle\int_{R^n}K_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=\int_{R^n}K(x)\mathrm{d}x$;

(ii) 对于固定的 $\delta>0$，有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x|>\delta}|K_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x=0.$$

定理6.23 设 $K\in L(\boldsymbol{R}^n)$ 且$\|K\|_1=1$，若 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$ $(1\leqslant p<\infty)$，则有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|K_\varepsilon * f - f\|_p = 0. \tag{6.11}$$

证明 由于

$$(K_\varepsilon * f)(x) - f(x) = \int_{R^n}[f(x-y) - f(x)]K_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_{R^n}[f(x-\varepsilon y) - f(x)]K(y)\,\mathrm{d}y,$$

故根据广义 Minkowski 不等式可得

$$\left\{\int_{R^n}|(K_\varepsilon * f)(x) - f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}$$
$$= \left\{\int_{R^n}\left|\int_{R^n}[f(x-\varepsilon y) - f(x)]K(y)\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}$$
$$\leqslant \int_{R^n}\left\{\int_{R^n}|f(x-\varepsilon y) - f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}|K(y)|\,\mathrm{d}y.$$

令
$$F_\varepsilon(y) = \left\{\int_{R^n}|f(x-\varepsilon y) - f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}.$$

显然，$0\leqslant F_\varepsilon(y)|K(y)|\leqslant 2\|f\|_p|K(y)|$，且当 $\varepsilon\to 0$ 时有 $F_\varepsilon(y)\to 0$。从而根据 Lebesgue 控制收敛定理，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|K_\varepsilon * f - f\|_p = 0.$$

现在，我们特别令 $K(x) = \rho(x)$：

$$\rho(x) = \begin{cases} c\exp\left(-\dfrac{1}{1-|x|^2}\right), & |x|\leqslant 1, \\ 0, & |x|>1, \end{cases}$$

其中 c 是使 $\|\rho\|_1 = 1$ 之常数。易证当 $f(x)$ 是具有紧支集 F 且属于 $L^p(R^n)$ 的函数时，$(\rho_\varepsilon * f)(x)$ 也具有紧支集。这是因为在等式

$$(\rho_\varepsilon * f)(x) = \int_{R^n}f(x-\varepsilon t)\rho(t)\mathrm{d}t = \int_{|t|<1}f(x-\varepsilon t)\rho(t)\mathrm{d}t$$

之中，当 $f(x)$ 的紧支集 F 与开球 $\bar{B}(x;\ \varepsilon)$ 不相交时，则由于 $|t|<1$，故 $f(x-\varepsilon t)\rho(t) = 0$，即 $(\rho_\varepsilon * f)(x) = 0$，所以，$(\rho_\varepsilon * f)(x)$ 的支集是 F 的 ε-邻域(指 $\{x;\ d(x,F)<\varepsilon\}$)。这就是说它具有紧

支集。

定理6.24 具有紧支集且无限次可微的函数类 $C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 在 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 中稠密。

证明 设 $f(x)\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，令

$$f_N(x)=\begin{cases} f(x), & |x|\leqslant N, \\ 0, & |x|>N. \end{cases}$$

显然，对于任意的 $\eta>0$，必存在 N，使得 $\|f-f_N\|_p<\eta$。由于 $f_N(x)$ 具有紧支集，故 $(\rho_\varepsilon * f_N)(x)\in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n)$。从而根据上述定理，存在 $\varepsilon>0$，使得

$$\|\rho_\varepsilon * f_N - f_N\|_p<\eta.$$

最后由不等式

$$\|\rho_\varepsilon * f_N - f\|_p\leqslant\|\rho_\varepsilon * f_N - f_N\|_p+\|f_N-f\|_p<2\eta$$

可知结论是成立的。

(三) Hardy-Littlewood 极大函数

在§5.6中，为了探讨 $\boldsymbol{R}^n$ 上的不定积分的微分问题，曾引进 H-L 极大函数的概念，并对 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$ 给出了估计式(5.22)。现在我们来讨论 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 的情形。

设 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，令

$$(Mf)(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|\,dy.$$

我们有下述定理：

定理6.25 设 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)(1<p\leqslant\infty)$，则 $(Mf)\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$ $(1<p\leqslant\infty)$，且有

$$\|Mf\|_p\leqslant A_p\|f\|_p. \tag{6.12}$$

证明 (i) $p=\infty$。(6.12)式显然成立，且有 $A_\infty=1$。

(ii) $1<p<\infty$。对任意的 λ，令

$$E_\lambda=\left\{x:|f(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\},$$

并作函数

$$f^{\lambda}(x)=\begin{cases}f(x), & x\in E_{\lambda},\\ 0, & x\bar{\in} E_{\lambda}.\end{cases}$$

因为 $|f(x)|\leqslant|f^{\lambda}(x)|+\lambda/2$，所以有

$$(Mf)(x)\leqslant(Mf^{\lambda})(x)+\frac{\lambda}{2}.$$

从而可知

$$\{x:(Mf)(x)>\lambda\}\subset\left\{x:(Mf^{\lambda})(x)>\frac{\lambda}{2}\right\}.$$

由于 $f^{\lambda}\in L^{1}(\boldsymbol{R}^{n})$，故可以引用估计式 (5.22) 而得到

$$m(\{x:(Mf)(x)>\lambda\}\leqslant\frac{2A}{\lambda}\int_{\boldsymbol{R}^{n}}|f^{\lambda}(x)|\mathrm{d}x.$$

上式左端是 $(Mf)(x)$ 的分布函数，若记为 $(Mf)_{*}(\lambda)$，则上式可重写为

$$(Mf)_{*}(\lambda)\leqslant\frac{2A}{\lambda}\int_{E_{\lambda}}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

根据定理 4.32，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{R}^{n}}|(Mf)(x)|^{p}\mathrm{d}x&=p\int_{0}^{\infty}\lambda^{p-1}(Mf)_{*}(\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&\leqslant p\int_{0}^{\infty}\lambda^{p-1}\left[\frac{2A}{\lambda}\int_{E_{\lambda}}|f(x)|\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\lambda\\&=2Ap\int_{0}^{\infty}\lambda^{p-2}\left[\int_{\boldsymbol{R}^{n}}|f(x)|\chi_{E_{\lambda}}(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\lambda\\&=2Ap\int_{\boldsymbol{R}^{n}}|f(x)|\left[\int_{0}^{\infty}\lambda^{p-2}\chi_{E_{\lambda}}(x)\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为

$$\int_{0}^{\infty}\chi_{E_{\lambda}}(x)\lambda^{p-2}\mathrm{d}\lambda=\int_{0}^{2|f(x)|}\lambda^{p-2}\,\mathrm{d}\lambda=\frac{2^{p-1}}{p-1}|f(x)|^{p-1},$$

所以最后得到

$$\int_{R^n}|(Mf)(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\frac{2^pAp}{p-1}\int_{R^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x.$$

这就证明了(6.12)式，其中

$$A_p=2\left(\frac{Ap}{p-1}\right)^{1/p}.$$

Hardy–Littlewood 极大函数在分析学的许多问题中有着重要的应用。

习　题

1．设 $0<m(E)<\infty$，令

$$N_p(f)=\left(\frac{1}{m(E)}\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p},\quad 1\leqslant p<\infty.$$

试证明当 $p_1<p_2$ 时，有 $N_{p_1}(f)\leqslant N_{p_2}(f)$。

2．设 $f\in L^2([0,1])$。令

$$g(x)=\int_0^1\frac{f(t)}{|x-t|^{1/2}}\mathrm{d}t,\quad 0<x<1,$$

试证明$\left(\int_0^1 g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leqslant 2\sqrt{2}\left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}$。

3．设 $m(E)<\infty$，$0<p<q<\infty$，试证明

$\|f\|_p\to\|f\|_q$（当 $p\to q$时）。

4．设 $f\in L^\infty(E)$，$w(x)>0$ 且 $\int_E w(x)\mathrm{d}x=1$。试证明

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_E|f(x)|^pw(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}=\|f\|_\infty.$$

5．设 $f\in L^\infty(E)$，$m(E)<\infty$，且$\|f\|_\infty>0$。试证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n}=\|f\|_\infty.$$

6．设$f\in L^2((0,\pi))$，试证明下面两个不等式是不相容的：

(i) $\int_0^\pi [f(x)-\sin x]^2 dx \leqslant \frac{4}{9}$;

(ii) $\int_0^\pi [f(x)-\cos x]^2 dx \leqslant \frac{1}{9}$.

7. 设 $0<p,q<\infty$，试证明 $L^p(E)\cdot L^q(E)=L^{pq/(p+q)}(E)$，其中 $L^p(E)\cdot L^q(E)=\{f\cdot g: f\in L^p(E), g\in L^q(E)\}$.

8. 设 $f(x), g(x)$ 是 E 上非负可测函数，$1\leqslant p<\infty$，$1\leqslant q<\infty$，$1\leqslant r\leqslant\infty$，$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$，试证明

$$\int_E f(x)g(x)dx \leqslant \|f\|_p^{1-p/r}\|g\|_q^{1-q/r}\left(\int_E f^p(x)g^q(x)dx\right)^{1/r}.$$

9. 设 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$g\in L^q(\boldsymbol{R}^n)$，$1\leqslant p,q<\infty$，$1/p+1/q-1>0$. 令 $h(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n} f(t)g(x-t)dt$，试证明

$$\|h\|_r\leqslant\|f\|_p\|g\|_q,\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1.$$

10. 设 $0<p_0<q_0<\infty$，若 $L^{p_0}(E)\subset L^{q_0}(E)$，试证明对 $0<p<q$，有 $L^p(E)\subset L^q(E)$.

11. 设 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^1)$，$g\in L^2(\boldsymbol{R}^1)$，令

$$f_h(x)=[f(x+h)-f(x)]/h\ (h\neq 0),$$

若有

$$\lim_{h\to 0}\int_{\boldsymbol{R}^1}|f_h(x)-g(x)|^2dx=0,$$

试证明存在常数 c，使得

$$f(x)=\int_0^x g(t)dt+c,\quad a.e.\ x\in\boldsymbol{R}^1.$$

12*. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $(0,\infty)$ 上可微函数列，且有

$$\int_0^\infty |f_n'(x)|^2dx\leqslant M,\quad |f_n(x)|\leqslant\frac{1}{x}$$

$$(n=1,2,\cdots,x\in(0,\infty)).$$

试证明$\{f_n(x)\}$是一致有界的，且对任给$\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$|x-y|<\delta$时，有

$$|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon,\quad x,y\in(0,\infty),\ n=1,2,\cdots.$$

13. 设$1\leqslant q<p$且$m(E)<\infty$，$f\in L^p(E)$且$f_k\in L^p(E)(k=1,2,\cdots)$。若$\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0$，试证明$\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_q=0$。

14. 设$f\in L^p([a,b])$，$f_k\in L^p([a,b])$ $(k=1,2,\cdots)$，且有$\|f_k-f\|_p\to0$ $(k\to\infty)$，试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^t f_k(x)\mathrm{d}x=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x,\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

15. 设$f_k(x)\to f(x)$ $(k\to\infty,x\in[a,b])$，且有

$$\int_a^b|f_k(x)|^r\mathrm{d}x\leqslant M\ (k=1,2,\cdots),\quad 0<r<\infty.$$

试证明对p：$0<p<r$，有

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b|f_k(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x=0.$$

16. 设$1\leqslant p<\infty$，$f\in L^p(E)$，$f_k\in L^p(E)(k=1,2,\cdots)$，且有$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$, a.e.，$\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k\|_p=\|f\|_p$。试证明

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0.$$

17. 设$1<p<\infty$，$f_k\in L^p(E)(k=1,2,\cdots)$，且有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\quad \sup_{1\leqslant k<\infty}\|f_k\|_p\leqslant M.$$

试证明对任意的$g\in L^{p'}(E)$(p'是p的共轭指标)，有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

18. 设$g(x)$是E上的可测函数，若对于任意的$f\in L^2(E)$，有$\|g\cdot f\|_2\leqslant M\|f\|_2$，试证明$|g(x)|\leqslant M$，a.e.$x\in E$。

19. 试说明在 Riemann 积分意义下平方可积的函数类不是完备空间（其中距离为 $d(f,g)=\|f-g\|_2$）。

20. 设 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$p>1$，而且对于任意一个具有紧支集的 $\varphi\in C(\boldsymbol{R}^n)$，有 $\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0$。试证明

$$f(x)=0,\quad \mathrm{a.e.}\, x\in \boldsymbol{R}^n.$$

21. 设 $m(E)=1$，且存在 $r>0$，使得 $f\in L^r(E)$。试证明

$$\lim_{p\to 0}\|f\|_p=\exp\left(\int_E \log|f(x)|\mathrm{d}x\right).$$

22*. 设 $f(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^1$ 上的非负的单调上升函数，令 $D=\{g:\ f\cdot g\in L[a,b]\}$，试证明 D 在 $L^2[a,b]$ 中稠密。

23. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $L^2([0,1])$ 中的绝对连续函数列，且 $f_n'\in L^2([0,1])$。又存在 $f,g\in L^2([0,1])$，满足

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_2=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\|f_n'-g\|_2=0,$$

试证明 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的绝对连续函数，且有

$$f'(x)=g(x),\quad \mathrm{a.e.}\, x\in[0,1].$$

24. 设 $\{\varphi_i(x)\}$ 是 $L^2(A)$ 上规一化完全系，$\{\psi_k(x)\}$ 是 $L^2(B)$ 上规一化完全系，试证明 $\{f_{i,k}(x,y)\}=\{\varphi_i(x)\cdot\psi_k(y)\}$ 是 $A\times B$ 上的规一化完全系。

25*. 设 $\{\varphi_k(x)\}$ 是 $L^2(E)$ 中规一化正交系，$m(E)<\infty$，且满足 $|f_k(x)|\leqslant M$ $(k\in N, x\in E)$。试证明级数 $\sum_{k\geq 1} f_k(x)/k$ 在 E 上几乎处处收敛。

26*. 设 $\{\varphi_n\}$ 是 $L^2([a,b])$ 中的规一化完全系。试证明对于 $[a,b]$ 中任一正测子集 E，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E \varphi_n^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 1.$$

27. 设 $\{\varphi_n\}$ 是 $L^2([a,b])$ 中的规一化完全系，若 $\{\psi_n\}$ 是 $L^2([a,b])$ 中满足 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b[\varphi_n(x)-\psi_n(x)]^2\mathrm{d}x<1$ 的正交系，试证明 $\{\psi_n\}$ 是

$L^2([a,b])$ 中的完全系。

28. 试证明 $\{\sin kx\}$ 是 $L^2([0,\pi])$ 中的完全系。

29*. 设 $\{\varphi_k\}$ 是 $L^2([a,b])$ 中的规一化正交系，$|\varphi_k(x)| \leqslant M$ $(k=1,2,\cdots)$。若有数列 $\{a_k\}$，使得级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处收敛，试证明

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

30. 设 $f\in L^2((-\pi,\pi])$，$\{\varphi_k(x)\}$ 是 $(-\pi,\pi]$ 上的三角函数系，若有 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x = 0$ $(k=1,2,\cdots)$，试证明

$$f(x)=0,\quad \text{a.e. } x\in(-\pi,\pi].$$

31*. 令 $X=\left\{f\in C^\infty([0,1]): f(0)=0, \int_0^1 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = 0\right\}$，试证明 X 在 $L^2([0,1])$ 中稠密。

32. 设 $\{\varphi_k\}$ 是 $L^2([a,b])$ 中的规一化完全系，令

$$f\in L^2([a,b]),\ c_k=\langle f,\varphi_k\rangle,\ f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x),$$

试证明 (a,b) 中的任一可测子集 E，有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\int_E \varphi_k(x)\mathrm{d}x.$$

(即 $f(x)$ 的广义 Fourier 级数可以逐项积分)

33*. 设 $\{\varphi_k\}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 中的规一化正交系，令

$$E=\{x: \lim_{k\to\infty}\varphi_k(x) \text{ 存在}\},$$

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x), & x\in E,\\ 0, & x\notin E.\end{cases}$$

试证明 $f(x)=0$, a.e. $x\in\boldsymbol{R}^n$。

34. 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数。若对任意的 $g\in L^p(E)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$，必有 $f\cdot g\in L(E)$，试证明 $f\in L^{p'}(E)$ (p' 是 p 的共轭指标)。

35. 设 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$ $(1\leqslant p<\infty)$. 令

$$f_*(\lambda)=m(\{x:|f(x)|>\lambda\}),\lambda>0,$$

试证明

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^p f_*(\lambda)=0,\quad \lim_{\lambda\to 0}\lambda^p f_*(\lambda)=0.$$

36. 若对 $B(0,1)$ 中任一闭集 F，均有

$$\int_F |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=o(|h|),\quad h\to 0.$$

试证明存在常数 c: $f(x)=c$, a.e. $x\in B(0,1)$.

37*. 设 $K\subset\boldsymbol{R}^n$ 是紧集, $F\subset\boldsymbol{R}^n$ 是闭集且 $K\cap F=\varnothing$, 试作一个在 $\boldsymbol{R}^n$ 上无穷次可微的函数 $\varphi(x)$，使得

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in K,\\ 0, & x\in F.\end{cases}$$

38*. 设 $K(x,y)$ 是$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$ 上的可测函数,且存在 M,使得

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}|K(x,y)|\mathrm{d}y\leqslant M,\quad \text{a.e. } x\in\boldsymbol{R}^n,$$

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}|K(x,y)|\mathrm{d}x\leqslant M,\quad \text{a.e. } y\in\boldsymbol{R}^n,$$

$f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)(1\leqslant p\leqslant\infty)$. 令 $Tf(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$,试证明

$$\|Tf\|_p\leqslant A\|f\|_p.$$

39. 设 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 上是局部可积的, $1<p<\infty$,试证明下列条件是等价的:

(i) $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$;

(ii) 存在 $M>0$, 对于 $\boldsymbol{R}^n$ 中任意有限个互不相交的正测集 $E_1,E_2,\cdots,E_k$, 有

$$\sum_{i=1}^k\left(\frac{1}{m(E_i)}\right)^{p-1}\left|\int_{E_i}f(x)\mathrm{d}x\right|^p\leqslant M.$$

40*. 设 $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $f(x)$ 是 (a, b) 上几乎处处不为零的可测函数，且满足

$$|f(x)| \leqslant c e^{-\delta|x|}, \quad \delta > 0, \quad x \in (a,b).$$

试证明若有 $g \in L^2((a,b))$，使得

$$\int_a^b x^n f(x) g(x) \mathrm{d}x = 0, \quad n = 0, 1, \cdots,$$

则 $g(x) = 0$, a.e. $x \in (a,b)$.

41. 设 $g \in L(\boldsymbol{R}^1)$，且 $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k - f\|_2 = 0$，试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x-y) g(y) \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) \mathrm{d}y.$$

42. 设 $f_k \in L^p(E)(k = 1, 2, \cdots)$, $1 \leqslant p < \infty$，且有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < \infty.$$

试证明 $\sum\limits_{k\geqslant 1} |f_k(x)| < \infty$, a.e. $x \in E$. 若记

$$f(x) \triangleq \sum_{k\geqslant 1} f_k(x),$$

则有

$$\|f\|_p \leqslant \sum_{k\geqslant 1} \|f_k\|_p \text{ 以及 } \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{N} f_k - f \right\|_p = 0.$$

43. 设 $f_k \in L(E) \cap L^\infty(E)$, $f \in L(E)$，若有

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_1 = 0, \quad \sup_k \|f_k\|_\infty < \infty,$$

试证明对 $1 < p < \infty$ 有

$$f \in L^p(E) \cap L^\infty(E), \quad \lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_p = 0.$$

44. 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $f \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\boldsymbol{R}^n)$，试证明 $f * g(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的连续函数。

附录（I） Stieltjes积分简介

对于连续函数$g(x)$的积分

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$$

可以看成是$g(x)$在$[0,1]$上的平均值。在某些情形下，考虑g的不同的平均也是重要的，它反映出g在$[0,1]$内各个地方的不同作用与影响。例如考虑

$$3\int_0^1 g(x)x^2\,\mathrm{d}x,$$

这也是g的一种平均。但此时在$[0,1]$中接近于1的点与接近于0的点上，对g求平均时的份量是不同的(这里的因子3是正规化常数)。这种“偏重”的平均一般用一个“权”函数

$$w:[0,1]\to[0,\infty]$$

来描述，即g在$[0,1]$上的加权w平均为

$$\int_0^1 g(x)w(x)\,\mathrm{d}x \Big/ \int_0^1 w(x)\,\mathrm{d}x.$$

有时我们还要考虑在平均时其权仅集中在某些点上，如$g(1/4)/2+g(3/4)/2$。这种情况相当于区间$[0,1/4)$，$(1/4,3/4)$以及$(3/4,1)$对积分没有贡献，也可以说类似于某种零测集。一般，这一问题可表述为

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n g(a_n),\quad a_n\in[0,1],\quad n=1,2,\cdots.$$

其中$p_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$且$\sum_{n=1}^{\infty} p_n=1$。

下面，我们来建立一种叫做Stieltjes积分的理论，在这一理

论中，上述种种命题将是这一理论的特殊情形。

(一) Riemann-Stieltjes 积分

定义 设$g(x)$，$f(x)$是定义在$[a,b]$上的实值函数，对于分划Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，任意选取ξ_i，$x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，并作Riemann-Stieltjes和式：

$$S_\Delta=\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)[f(x_i)-f(x_{i-1})].$$

若极限

$$\lim_{|\Delta|\to 0}S_\Delta=I,\quad |\Delta|=\max\{|x_i-x_{i-1}|:i=1,2,\cdots,n\}$$

存在，即对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$|\Delta|<\delta$时有

$$|I-S_\Delta|<\varepsilon,$$

则称I是g关于f在$[a,b]$上的Riemann-Stieltjes积分，简称为R-S积分，并记为

$$I=\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x).$$

特例，若$f(x)=x$，则$\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$正是Riemann积分

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

进一步，若$f(x)$是绝对连续的单调上升函数，则有

$$\int_a^b \mathrm{d}f(x)=\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x,$$

上式右端的积分是Lebesgue积分。

R-S积分有下述简单性质：

(i) 若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$存在，$c$是常数，则有下面的积分存在

$$\int_a^b cg(x)\mathrm{d}f(x),\qquad \int_a^b g(x)\mathrm{d}(cf(x))$$

且有$\int_a^b cg(x)\mathrm{d}f(x)=\int_a^b g(x)\mathrm{d}(cf(x))=c\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$。

(ii) 若$\int_a^b g_1(x)\mathrm{d}f(x)$，$\int_a^b g_2(x)\mathrm{d}f(x)$存在，则存在

$$\int_a^b [g_1(x)+g_2(x)]\mathrm{d}f(x)$$

且有

$$\int_a^b [g_1(x)+g_2(x)]\mathrm{d}f(x)=\int_a^b g_1(x)\mathrm{d}f(x)+\int_a^b g_2(x)\mathrm{d}f(x).$$

(iii) 若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}f_1(x)$，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}f_2(x)$存在，则存在

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}[f_1(x)+f_2(x)]$$

且有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}[f_1(x)+f_2(x)]=\int_a^b g(x)\mathrm{d}f_1(x)+\int_a^b g(x)\mathrm{d}f_2(x).$$

定理 积分$\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$存在的必要且充分的条件是：对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当任意两个分划$\Delta'$与$\Delta''$满足$|\Delta'|<\delta$与$|\Delta''|<\delta$时有

$$|S_{\Delta'}-S_{\Delta''}|<\varepsilon.$$

定理 设$\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$存在，$a<c<b$，则积分$\int_a^c g(x)\mathrm{d}f(x)$，$\int_c^b g(x)\mathrm{d}f(x)$存在，且有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)=\int_a^c g(x)\mathrm{d}f(x)+\int_c^b g(x)\mathrm{d}f(x).$$

定理 设$\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$存在，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$也存在，且有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)=[g(b)f(b)-g(a)f(a)]-\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x). \quad (1)$$

证明 对于分划$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$以及$x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，我们有

$$S_\Delta=\sum_{i=1}^n g(\xi_i)[f(x_i)-f(x_{i-1})]$$

$$=\sum_{i=1}^n g(\xi_i)f(x_i)-\sum_{i=1}^n g(\xi_i)f(x_{i-1})$$

$$= -\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)[g(\xi_{i+1}) - g(\xi_i)]$$

$$+ g(\xi_n)f(b) - g(\xi_1)f(a).$$

$$= -T_\Delta + [g(b)f(b) - g(a)f(a)],$$

其中

$$T_\Delta = \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)[g(\xi_{i+1}) - g(\xi_i)] + f(a)[g(\xi_1) - g(a)]$$

$$+ f(b)[g(b) - g(\xi_n)]$$

是 $f(x)$ 关于 $g(x)$ 在$[a,b]$上的 Riemann-Stieltjes 和式。从而当 $|\Delta|\to 0$ 时，可知$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$存在，且(1)式成立。

注意，当积分

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$$

存在时，f 与 g 在$[a,b]$上不能有公共不连续点。为了证明这一点，不妨假设 $t_0\in(a,b)$是 f 与 g 的公共不连续点，则存在$\eta>0$，使得对任给的 $\varepsilon>0$ 总有点 t_1 与 t_2 满足

$$t-\frac{\varepsilon}{2}<t_1<t_0<t_2<t+\frac{\varepsilon}{2}, \qquad |f(t_2)-f(t_1)|>\eta.$$

作分划

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i_0-1}=t_1<x_{i_0}=t_2<\cdots<x_n=b, \qquad |\Delta|<\varepsilon.$$

选取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i](i\neq i_0)$；$\xi_{i_0},\xi'_{i_0}\in[x_{i_0-1},x_{i_0}]$ 且 $\xi_{i_0}\neq\xi_{i_0-1}$。并令

$$S_\Delta=\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)[f(x_i)-f(x_{i-1})],$$

$$S'_\Delta=\sum_{i\neq i_0} g(\xi_i)[f(x_i)-f(x_{i-1})]$$

$$+g(\xi'_{i_0})[f(x_{i_0})-f(x_{i_0-1})].$$

显然，我们有

$$|S_\Delta - S'_\Delta| = |g(\xi_{i_0}) - g(\xi'_{i_0})||f(x_{i_0}) - f(x_{i_0-1})|$$
$$>\eta|g(\xi_{i_0}) - g(\xi'_{i_0})|.$$

由于 g 在 $x=t_0$ 处不连续，总可选取上述的 ξ_{i_0} 与 ξ'_{i_0} 使得

$$|g(\xi_{i_0}) - g(\xi'_{i_0})|>\delta$$

(某个与 ε 无关的正数)．从而上述不等式与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$ 存在相矛盾.

R-S 积分 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$ 的一个最重要的特例是 $f(x)$ 为单调或有界变差的情形.

引理 设 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数，$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调上升函数，令 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,

$$m_i=\inf\{g(x): x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\},\qquad M_i=\sup\{g(x): x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\},$$

$$L_\Delta=\sum_{i=1}^n m_i[f(x_i)-f(x_{i-1})],$$

$$U_\Delta=\sum_{i=1}^n M_i[f(x_i)-f(x_{i-1})].$$

显然有 $L_\Delta\leqslant S_\Delta\leqslant U_\Delta$，并不难证明：

(i) 若 Δ' 是 Δ 的加细分划，则

$$L_{\Delta'}\geqslant L_\Delta;\qquad U_{\Delta'}\leqslant U_\Delta. \tag{2}$$

(ii) 若 Δ' 与 Δ'' 是任意两个分划，则

$$L_{\Delta'}\leqslant U_{\Delta''}. \tag{3}$$

定理 设 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$ 存在，且有

$$\left|\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)\right|\leqslant\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|g(x)|\cdot\bigvee_a^b(f). \tag{4}$$

证明 为了证明积分的存在性，不妨假定 $f(x)$ 是单调上升

函数，而且只需指出极限

$$\lim_{|\Delta|\to 0} L_\Delta,\quad \lim_{|\Delta|\to 0} U_\Delta$$

存在且相等。若 $f(x)$ 是一个常数函数，则结论是显然的。否则由于 $g(x)$ 的连续性可知，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要分划 Δ 的 $|\Delta|<\delta$，就有

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}.$$

因此，当 $|\Delta|<\delta$ 时得到

$$U_\Delta - L_\Delta = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)[f(x_i) - f(x_{i-1})] < \varepsilon.$$

这说明

$$\lim_{|\Delta|\to 0}(U_\Delta - L_\Delta) = 0. \tag{5}$$

现在证明极限

$$\lim_{|\Delta|\to 0} U_\Delta$$

存在。若不然，就存在 $\varepsilon>0$ 以及分划序列 $\{\Delta_k'\}$ 与 $\{\Delta_k''\}$，$|\Delta_k'|$ 与 $|\Delta_k''|\to 0(k\to\infty)$，使得

$$U_{\Delta_k'} - U_{\Delta_k''} > \varepsilon.$$

从而根据(5)式可知，当 k 充分大时有 $L_{\Delta_k'} - U_{\Delta_k''} > \varepsilon/2 > 0$。这与(3)式矛盾。

最后，不等式(4)可直接从 R-S 和式 S_Δ 的估计并取极限而得到。

注 设 $g(x), f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实值函数。如果对于 $a<c<b$，我们只知道积分

$$\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}f(x),\qquad \int_c^b g(x)\,\mathrm{d}f(x)$$

存在，并不能推出

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}f(x)$$

的存在性。例如令 $g(x)=\chi_{[0,1]}(x)$，$f(x)=\chi_{[0,1]}(x)$，

易知 $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}f(x)=0$，　$\int_{-1}^0 g(x)\mathrm{d}f(x)=0$。

但积分 $\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}f(x)$ 并不存在。不过，下述命题是成立的：

若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数，$g(x)$ 在 $x=c$ 处连续 $(a<c<b)$，则当积分

$$\int_a^c g(x)\mathrm{d}f(x),\qquad \int_c^b g(x)\mathrm{d}f(x)$$

存在时，积分 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$ 存在，且有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)=\int_a^c g(x)\mathrm{d}f(x)+\int_c^b g(x)\mathrm{d}f(x).$$

例 设 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个球层 $a\leqslant|x|\leqslant b$ 上是可积的。$g(|x|)=g(r)$ 是 $a\leqslant r\leqslant b$ 上的连续函数，其中 $0\leqslant a<b<\infty$，若令

$$F(r)=\int_{a\leqslant|x|\leqslant r} f(x)\mathrm{d}x,\qquad a\leqslant r\leqslant b,$$

则有公式

$$\int_{a\leqslant|x|\leqslant b} f(x)g(|x|)\mathrm{d}x=\int_a^b g(r)\mathrm{d}F(r).$$

上式的右端积分是存在的。不妨设 $f(x)\geqslant 0$，并记上式左端为 I。作区间 $[a,b]$ 的分划 $\Delta: a=r_0<r_1<\cdots<r_k=b$，我们有

$$I=\sum_{i=1}^k\int_{r_{i-1}\leqslant|x|\leqslant r_i} f(x)g(|x|)\mathrm{d}x.$$

若令

$$m_i=\inf\{g(r): r_{i-1}\leqslant r\leqslant r_i\},\quad M_i=\sup\{g(r): r_{i-1}\leqslant r\leqslant r_i\},$$

其中 $i=1,2,\cdots,k$。则由于 $f\geqslant 0$，可知

$$\sum_{i=1}^k m_i\int_{r_{i-1}\leqslant|x|\leqslant r_i} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant I\leqslant\sum_{i=1}^k M_i\int_{r_{i-1}\leqslant|x|\leqslant r_i} f(x)\mathrm{d}x,$$

从而得到

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot [F(r_i) - F(r_{i-1})] \leqslant I \leqslant \sum_{i=1}^{k} M_i [F(r_i) - F(r_{i-1})].$$

根据 Riemann–Stieltjes 积分定义，当分划的小区间长度的最大者趋于零时，上式两端都趋于

$$\int_a^b g(r)\mathrm{d}F(r), \qquad \text{即得} \qquad I = \int_a^b g(r)\mathrm{d}F(r).$$

(二) Lebesgue–Stieltjes 测度与积分

现在，我们要在 $\boldsymbol{R}^1$ 上建立一种新的测度、积分理论——Lebesgue–Stieltjes 测度、积分理论，它在概率论中有着非常重要的应用，本书正文中所讲的 Lebesgue 测度、积分是它的一种特殊情形。

我们还将讨论这种 Lebesgue–Stieltjes 积分与 Riemann–Stieltjes 积分的关系，并从 Lebesgue–Stieltjes 测度的角度给出一个函数是 Riemann–Stieltjes 可积的充分且必要的条件。

定义 设 $f(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^1$ 上的单调上升实值函数，对于 $\boldsymbol{R}^1$ 中非空子集 E，令

$$\mu_f^*(E) = \inf\left\{\sum_k [f(b_k) - f(a_k)] : E \subset \bigcup_k (a_k, b_k]\right\},$$

并规定 $\mu_f^*(\varnothing) = 0$，则我们有下述事实：

(i) $\mu_f^*(\varnothing) = 0$，$\mu_f^*(E) \geqslant 0$；

(ii) 若 $E_1 \subset E_2$，则 $\mu_f^*(E_1) \leqslant \mu_f^*(E_2)$；

(iii) $\mu_f^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f^*(E_n)$.

(上述事实的证明与 § 2.1中所述类似。)这说明 μ_f^* 是定义在 $\boldsymbol{R}^1$ 上的外测度，我们称它为相应于 f 的 Lebesgue–Stieltjes 外测度，当 $f(x) = x$ 时，它就是 Lebesgue 外测度。此外，μ_f^* 还满足距离外测度性质：

定理 设 E_1, E_2 是 $\boldsymbol{R}^1$ 中的点集，若 $d(E_1, E_2) > 0$，则有

$$\mu_f^*(E_1) + \mu_f^*(E_2) = \mu_f^*(E_1 \cup E_2).$$

证明 首先我们看到，若 $a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b$，则有

$$f(b)-f(a)=\sum_{i=1}^{n}[f(a_i)-f(a_{i-1})].$$

这说明在 μ_f^* 的定义中，我们总可以使每个覆盖子区间 $(a_k,b_k]$ 取得充分小，从而对任意的 $\varepsilon>0$，我们选取 $\{(a_k,b_k]\}$，其中每个 $(a_k,b_k]$ 的长度小于 $d(E_1,E_2)$，使得

$$\bigcup_k (a_k,b_k]\supset E_1\cup E_2,$$

$$\sum_k[f(b_k)-f(a_k)]\leqslant\mu_f^*(E_1\cup E_2)+\varepsilon.$$

于是再把 $\{(a_k,b_k]\}$ 分为两个覆盖族，其一覆盖 E_1，其二覆盖 E_2，就可以得到

$$\mu_f^*(E_1)+\mu_f^*(E_2)\leqslant\sum_k[f(b_k)-f(a_k)]\leqslant\mu_f^*(E_1\cup E_2)+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知

$$\mu_f^*(E_1)+\mu_f^*(E_2)\leqslant\mu_f^*(E_1\cup E_2).$$

上式的反向不等式可由外测度的次可加性立即得出。

为了从 μ_f^* 导出可测集并建立相应的测度，与§2.2所作的一样，我们仍用 Carathéodory 条件来定义：若对任意 $T\subset\boldsymbol{R}^1$，有

$$\mu_f^*(T)=\mu_f^*(T\cap E)+\mu_f^*(T\cap E^c),$$

则称 E 为 $\boldsymbol{R}^1$ 中的 μ_f^* 可测集，此时，其外测度称为 Lebesgue-Stieltjes 测度，记为 μ_f。简称为 L-S 测度 μ_f 或 μ。$\boldsymbol{R}^1$ 中的 L-S 可测集构成一个 σ-代数，其证明与§2.2中所述类似。由此可知，为了证明 $\boldsymbol{R}^1$ 中的 Borel 集都是 L-S 可测集，只需证明 $\boldsymbol{R}^1$ 中的区间是 L-S 可测集即可。因为 μ_f 具有距离外测度性质，所以区间是L-S可测集的证明与§2.2中所述类似。

定理 若 $E\in\boldsymbol{R}^1$，则存在一个 Borel 集 B：$B\supset E$，使得 $\mu_f^*(E)=\mu_f(B)$。

证明 对任一自然数 n，选择 $\{(a_k^{(n)},b_k^{(n)}]\}$，使得

$$E \subset \bigcup_k (a_k^{(n)}, b_k^{(n)}], \qquad \sum_k [f(b_k^{(n)}) - f(a_k^{(n)})] \leqslant \mu^*(E) + \frac{1}{n}.$$

作

$$B_n = \bigcup_k (a_k^{(n)}, b_k^{(n)}], \qquad B = \bigcap_n B_n.$$

则 $E \subset B$，且 B 是 Borel 集。我们有

$$\mu(B) \leqslant \mu(B_n) \leqslant \sum_k [f(b_k^n) - f(a_k^n)] \leqslant \mu^*(E) + \frac{1}{n}.$$

从而知 $\mu(B) \leqslant \mu^*(E)$。其反向不等式是显然的。

定理 若 $f(x)$ 是 R^1 上的单调上升的右连续函数，则有

$$\mu_f((a,b]) = f(b) - f(a),$$

特别有

$$\mu_f(\{a\}) = f(a) - f(a-0).$$

证明 因为 $(a,b]$ 是本身的一个覆盖，所以总有

$$\mu_f((a,b]) \leqslant f(b) - f(a).$$

另一方面，设

$$(a,b] \subset \bigcup_k (a_k, b_k].$$

对任给的 $\varepsilon > 0$，由于 f 的右连续性，故可选择 $\{b_k'\}$：

$$b_k < b_k', \qquad f(b_k) > f(b_k') - \varepsilon 2^{-k}.$$

若 a' 满足 $a < a' < b$，则 $\{(a_k, b_k')\}$ 覆盖 $[a', b]$，从而存在有限子覆盖，不妨设

$$[a', b] \subset \bigcup_{k=1}^m (a_k, b_k').$$

假定 $a_{k+1} < b_k'$ $(k = 1, 2, \cdots, m-1)$（必要时剔除一部分区间），且 $a_1 < a'$ 以及 $b < b_m'$。从而可知

$$f(a_1) \leqslant f(a'), \qquad f(b) \leqslant f(b_m');$$

$$\sum_k [f(b_k) - f(a_k)] \geqslant \sum_{k=1}^m [f(b_k) - f(a_k)]$$

$$= f(b_m) - f(a_1) + \sum_{k=1}^{m-1} [f(b_k) - f(a_{k+1})].$$

因为

$$f(b_m) - f(a_1) = [f(b_m) - f(b'_m)] + [f(b'_m) - f(a_1)]$$
$$\geqslant -\varepsilon + [f(b) - f(a')],$$
$$f(b'_k) - f(a_{k+1}) \geqslant 0, \qquad k = 1, \cdots, m-1,$$

所以我们有

$$\sum_{k=1}^{m-1} [f(b_k) - f(a_{k+1})]$$
$$= \sum_{k=1}^{m-1} [f(b_k) - f(b'_k)] + \sum_{k=1}^{m-1} [f(b'_k) - f(a_{k+1})]$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^{m-1} (-\varepsilon 2^{-k}) \geqslant -\varepsilon.$$

归纳以上所述可知

$$\sum_k [f(b_k) - f(a_k)] \geqslant -2\varepsilon + [f(b) - f(a')].$$

令 $\varepsilon \to 0$，$a' \to a$，我们得到

$$\sum_k [f(b_k) - f(a_k)] \geqslant f(b) - f(a),$$

即

$$\mu((a, b]) \geqslant f(b) - f(a).$$

至于定理的第二个结论，只要应用上述过程于$(a - 1/k, a]$ $(k = 1, 2, \cdots)$即可。

注 (i) 若在 L–S 外测度的定义中，采用开区间代替半开闭区间，即令

$$\mu_f^*(E) = \inf\left\{\sum_k [f(b_k) - f(a_k)] : E \subset \bigcup_k (a_k, b_k)\right\},$$

则不难证明 μ_f^* 是 R^1 上的距离外测度，且有

(A) $\mu_f^*(E) = \inf\{\mu_f^*(G) : 开集\ G \supset E\}$；

(B) $$\mu_f^*(\{a\}) = f(a+0) - f(a-0);$$
$$\mu_f^*([a,b]) = f(b+0) - f(a-0);$$
$$\mu_f^*((a,b]) = f(b+0) - f(a+0);$$
$$\mu_f^*([a,b)) = f(b-0) - f(a-0);$$
$$\mu_f^*((a,b)) = f(b-0) - f(a+0).$$

易知，在 $f(x)$ 是右连续函数的情形下，两者所导出的外测度是相同的.

(ii) 若 ν 是 R^1 上的有限 Borel 测度，则由定义

$$f_\nu(x) = \nu((-\infty, x]), \quad -\infty < x < \infty$$

可作出一个在 R^1 上的单调上升函数 $f_\nu(x)$，且有

$$\nu((a,b]) = f_\nu(b) - f_\nu(a).$$

可以证明，由 $f_\nu(x)$ 导出的 L-S 测度(作为一个 Borel 测度) μ_f 是与 ν 一致的(其中 $f_\nu(x)$ 的右连续性扮演着重要的角色)。这说明每一个有限 Borel 测度都是 L-S 测度。

例 给定点列 $\{x_n\}$ 与正数列 $\{h_n\}$，且 $\sum\limits_n h_n < \infty$，则称函数

$$h(x) = \sum_{x_n \leq x} h_n$$

为跃阶函数，它是 R^1 上单调上升且右连续的函数，并在不连续点 x_n 处有跃阶值 h_n。设与此 h 相应的 L-S 测度为 μ_h，则任一点集 E 都是 μ_h 可测的，且其测度为

$$\mu_h(E) = \sum_{x_n \in E} h_n.$$

事实上，单元集 $\{x_n\}$ 之测度为 h_n，而点集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 之补集测度为零，从而由 μ_h 之可数可加性推知上式是成立的。我们称相应于跃阶函数的 L-S 测度为离散测度。

例 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调上升的绝对连续函数，记相应于 f 的 L-S 测度为 μ_f (限于区间 $[a,b]$)，则 $[a,b]$ 中任一个 Lebesgue

可测集E都是μ_f可测的，且有

$$\mu_f(E)=\int_E f'(x)\,dx.$$

这只要首先注意到对于区间$(\alpha,\beta]$有

$$\mu_f((\alpha,\beta])=f(\beta)-f(\alpha)=\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx,$$

然后再用常见的方法(通过开集)就可将上式推广到可测集。

例 设$f(x)$是$[a,b]$上单调上升的绝对连续函数。若$E\subset[a,b]$是μ_f可测集，则$E\setminus\{x\in E:f'(x)=0\}$是Lebesgue可测集。

在给定L-S测度的基础上，我们就可以定义(用第三章的方法)μ_f-可测函数，并建立类似的性质。显然，定义在Borel集上的Borel函数是μ_f-可测函数。不难证明：若$f(x)$是单调上升的绝对连续函数，且$g(x)$是Lebesgue可测函数，则$g(x)$是μ_f-可测函数。

类似地，对于μ_f-可测函数$g(x)$，我们可以用第四章的方法来定义g关于μ_f的积分，并记为

$$\int g(x)\,d\mu_f,$$

称它为g关于单调上升函数f的Lebesgue-Stieltjes积分，简称为L-S积分。若

$$\int g(x)\,d\mu_f$$

是有限值，则称g关于f是L-S可积的。

例 设$f(x)$是$\mathbf{R}^1$上的单调上升的右连续函数，而且$E\subset\mathbf{R}^1$是有界Borel集。若$g(x)$是E上的有界Borel函数，则g关于f的L-S积分存在。

例 若$h(x)$为$\mathbf{R}^1$上的跃阶函数

$$h(x)=\sum_{x_n<x}h_n,$$

从而μ_h为离散测度，且实值函数$g(x)$关于h的L-S积分为

$$\int g(x)\mathrm{d}\mu_h = \sum_n g(x_n)h_n.$$

相应于Lebesgue积分的许多事实，L-S积分也有类似的结果。现举例如下：

定理 设$f(x)$是R^1上的单调上升函数，$\{g_k(x)\}$是μ_f可测集E上的μ_f-可测函数，且有

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = g(x) \quad \text{a. e.}.$$

若$|g_k(x)| \leqslant G(x)$ $(x\in E)$，且

$$\int_E G(x)\mathrm{d}\mu_f$$

存在，则$g(x)$在E上关于$f(x)$的L-S积分存在，且有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}\mu_f = \int_E g(x)\mathrm{d}\mu_f.$$

定理 设$f(x)$是R^1上的单调上升函数，$\{g_k(x)\}$是μ_f-可测集E上的μ_f-可测函数。若

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_E |g_k(x)|\mathrm{d}\mu_f < \infty,$$

则有

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)\mathrm{d}\mu_f = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}\mu_f.$$

例 设$f(x)$是$[a,b]$上的单调上升函数。若$g(x)$关于$f(x)$的L-S积分存在或者$g(x)\cdot f'(x)$的Lebesgue积分存在，则有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}\mu_f = \int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

现在，我们来讨论R-S积分与L-S测度、积分之间的关系。为论述简明起见，以下总假定$f(x)$是$[a,b]$上的单调上升的右连续函数。设$g(x)$是$[a,b]$上的有界函数。作渐细分划序列$\{\Delta_k\}$ $(\Delta_{k+1}\supset\Delta_k)$，且当$k\to\infty$时$|\Delta_k|\to 0$。令

$$M_i^{(k)} = \sup_{x_{i-1}^{(k)}\leqslant x\leqslant x_i^{(k)}}\{g(x)\},\quad m_i^{(k)} = \inf_{x_{i-1}^{(k)}\leqslant x\leqslant x_i^{(k)}}\{g(x)\},$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n_k.$$

并作函数列

$$\varphi_k(x)=\sum_{i=1}^{n_k}M_i^{(k)}\chi_{(x_{i-1},x_i]}(x),$$

$$\psi_k(x)=\sum_{i=1}^{n_k}m_i^{(k)}\chi_{(x_{i-1},x_i]}(x),$$

其中$k=1,2,\cdots$。沿用(一)中引理的记号，我们有

$$U_{\Delta_k}=\int_a^b\varphi_k(x)\mathrm{d}\mu_f,\qquad L_{\Delta_k}=\int_a^b\psi_k(x)\mathrm{d}\mu_f.$$

显然，$\varphi_k(x)\geqslant\varphi_{k+1}(x)\geqslant\cdots\geqslant g(x)\geqslant\cdots\geqslant\psi_{k+1}(x)\geqslant\psi_k(x)$。
若令

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\varphi(x),\quad \lim_{k\to\infty}\psi_k(x)=\psi(x).$$

则由控制收敛定理可知

$$\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}\mu_f=\lim_{k\to\infty}\int_a^b\varphi_k(x)\mathrm{d}\mu_f$$

$$\geqslant\lim_{k\to\infty}\int_a^b\psi_k(x)\mathrm{d}\mu_f=\int_a^b\psi(x)\mathrm{d}\mu_f.$$

从这一角度出发，我们可将 R-S 积分的定义重述如下：

若积分

$$\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}\mu_f \quad 与 \quad \int_a^b\psi(x)\mathrm{d}\mu_f$$

(不依赖于分划序列的选择)相同且等于a，则称$g(x)$关于$f(x)$在区间$[a,b]$上是可积的，记为

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)=a.$$

定理 设$g(x)$是$[a,b]$上的有界函数，$f(x)$是$[a,b]$上的单调上升的右连续函数。则$g(x)$关于$f(x)$在$[a,b]$上 R-S 可积的充分且必要条件是：$g(x)$在$[a,b]$上是几乎处处(关于μ_f)连续的。此外，若

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$$

存在，则 $g(x)$ 关于 $f(x)$ 的 L-S 积分存在，且有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)=\int_a^b g(x)\mathrm{d}\mu_f. \tag{6}$$

证明 假设

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$$

存在，考虑前面所说的分划序列 $\{\Delta_k\}$ 以及 $\{\varphi_k(x)\}$，$\{\psi_k(x)\}$，则有

$$\int_a^b [\varphi(x)-\psi(x)]\mathrm{d}\mu_f=0.$$

由此易知 $\varphi(x)=\psi(x)$ a.e. (μ_f)。设 $x\in[a,b]$ 且 x 不属于一切分划 Δ_k 的分点，且 $\varphi(x)=g(x)=\psi(x)$，则对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 k，使得

$$\varphi_k(x)-\psi_k(x)<\varepsilon.$$

因为 x 是某一个区间 $(x_{i-1}^{(k)},x_i^{(k)})$ 的内点，所以存在 $\delta>0$，使得 $(x-\delta,x+\delta)\subset(x_{i-1},x_i]$。显然有

$$|g(x)-g(y)|\leqslant\varphi_k(x)-\psi_k(x)<\varepsilon,\quad |x-y|<\delta.$$

这说明 $g(x)$ 在 x 处连续。由于分划 $\{\Delta_k\}$ 的分点全体为 μ_f 零测集，故知 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是几乎处处(关于 μ_f)连续的函数。

现在假设 $g(x)$ 是几乎处处(关于 μ_f)连续的。若 $x\neq a$ 是 $g(x)$ 的连续点，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$\sup_{(x-\delta,x+\delta)}\{g(y)\}-\inf_{(x-\delta,x+\delta)}\{g(y)\}>\varepsilon.$$

考虑前面所讲的分划序列 $\{\Delta_k\}$，则对某个 k，存在 Δ_k 的分点 x_{i-1}，x_i，使得 $x\in(x_{i-1},x_i]\subset(x-\delta,x+\delta)$。由此可知

$$\varphi(x)-\psi(x)\leqslant\varphi_k(x)-\psi_k(x)<\varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知，$\varphi(x)=g(x)=\psi(x)$ a.e. (μ_f)。这说明 $g(x)$ 是 μ_f 可测的，且

$$\int_a^b g(x)\,d\mu_f$$

存在。显然(6)式成立。

附录 (II)　部分习题的参考解答与提示

第 一 章

4. $\left\{x:\overline{\lim_{j\to\infty}} f_j(x)>0\right\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{j=N}^{\infty}\left\{x:f_j(x)\geqslant\frac{1}{k}\right\}.$

15. 记 $E=\{x_n\}$，并作可列集

$$A=\{x_n-x_m:n\neq m\},$$

取 $x_0\bar{\in}A$，即得所证。

16. 采用二进位小数表示点集 $(0,1]$ 与 $(0,1]\times(0,1]$ 中的点。

17. 不妨设 $E=(0,1]\times(0,1]$，任取 E 中点集

$$E_y=\{(x,y):0<x\leqslant 1\},\quad 0<y\leqslant 1.$$

若 E_y 与 B 中子集一一对应，则 $\bar{\bar{B}}=c$；否则必有 $\bar{\bar{A}}=c$。

18. 作映射 f: $\mathscr{P}(N)\longmapsto R^1$ 如下：对 $A\in\mathscr{P}(N)$，

$$f(A)=\begin{cases}\sum_{n\in A}2^{-n}, & N\backslash A \text{ 是无限集},\\ \sum_{n\in A}2^{-n}+1, & N\backslash A\text{是有限集}.\end{cases}$$

另一方面，又存在满映射 g: $\mathscr{P}(Z)\longmapsto R^1$：对 $B\in\mathscr{P}(Z)$，

$$g(B)=\begin{cases}\log\left(\sum_{n\in A}2^{-n}\right), & A\text{ 有下界},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

19. 作映射 $f:A\longmapsto\mathscr{P}(N\times Q)$：

$$f(x_1,x_2,\cdots)=\{(n,q)\in N\times Q:\ q<x_n\},$$

则得

$$\bar{\bar{A}}\leqslant\overline{\overline{\mathscr{P}(N\times Q)}}\sim\overline{\overline{\mathscr{P}(N\times N)}}\sim R^1.$$

22. 设 $f: B\mapsto A$, $a_1,a_2\in A$ 且 $a_1\neq a_2$, 作映射 $g: A\cup B\mapsto A\times A$ 如下：

$$g(x)=\begin{cases}(x,a_1), & x\in A,\\ (f(x),a_2), & x\in B\setminus A.\end{cases}$$

再根据 Bernstein 定理即得所证。

24. 采用反证法。假定 $\Phi\sim \boldsymbol{R}^1$, 不妨设 $a\in \boldsymbol{R}^1$ 与 $g_a\in\Phi$ 对应，试研究函数

$$f(x)=g_x(x)+1.$$

26. 任取 $a\in X$, 由 $f(a)\in X$, 可知

$$f[f(a)]\in X.$$

同理可得 $f[f[f(a)]]\in X$ 等等. 记

$$\underbrace{f[f[f[\cdots[f(a)]\cdots]]]}_{n\text{层}}=f^{[n]}(a)\in X,$$

研究由 $a,f(a),\cdots,f^{[n]}(a)$ 组成的集合。

27. 作 $S=\{A\in\mathscr{P}(X):A\subset f(A)\}$, 并研究

$$E=\bigcup_{A\in S}A.$$

37. 对任给 $\varepsilon>0$ 以及 $x\in F$, 存在 $m=m(x)$, 使得 $f_m(x)<\varepsilon$. 进一步又存在开球 $B(x,\delta)$, 使得 $f_m(y)<\varepsilon$, $y\in B(x,\delta)$. 从而 $\{B(x,\delta)\}_{x\in F}$ 构成 F 的一个开覆盖。

39. 采用反证法. 假定 $\bigcap_\alpha F_\alpha=\varnothing$, 令 $G_\alpha=F_\alpha^c$, 则有

$$\bigcup_\alpha G_\alpha=\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)^c=\boldsymbol{R}^n.$$

取定 $F_{\alpha'}\in\{F_\alpha\}$, 并注意 $\{G_\alpha\}$ 是 $F_{\alpha'}$ 的开覆盖。

44. 令

$$w_\delta(x)=\sup_{0<|y-x|<\delta}\{f(y)\}-\inf_{0<|y-x|<\delta}\{f(y)\},$$

$$w(x)=\lim_{\delta\to 0}w_\delta(x),$$

则

$$\{x:\lim_{y\to x} f(y)\text{存 在}\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x:\ w(x)<\frac{1}{n}\right\}.$$

48．不存在满足条件(i)，(ii)和(iii)的连续函数$f(x,y)$，理由如下：作函数列

$$F_n(x,y)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n},y\right)-f(x,y)\right],\quad n=1,2,\cdots,$$

则$F_n\in C(\boldsymbol{R}^2)$，且有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x,y)=f'_x(x,y).$$

从而可知，$f'_x(x,y)$的连续点集A是$\boldsymbol{R}^2$中稠密的G_δ型集。同理$f'_y(x,y)$的连续点集B也是$\boldsymbol{R}^2$中稠密的G_δ型集。因此，在稠密的G_δ型集$A\cap B$上，$f'_x(x,y)$与$f'_y(x,y)$均连续。

49．设J是$I=[0,1]$中任一闭子区间，作点集

$$E_k=\{x\in J:f_k(x)=0\},$$

则

$$J=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k.$$

根据Baire定理，可知存在k_0，使得E_{k_0}含有开区间，不妨设为J_1：$J_1\subset J$。由f_k之连续性可知$f_k(x)=0$，$x\in J_1$。由J之任意性可得$f(x)$在I的稠密子集上为零，从而得

$$f(x)=0,\quad x\in I.$$

61．(i) 假定$\chi_E(x)$是$f_n\in C(\boldsymbol{R}^1)(n=1,2,\cdots)$的极限，则由

$$E=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{x\in\boldsymbol{R}^1:f_n(x)\geqslant\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{x\in\boldsymbol{R}^1:f_n(x)>\frac{1}{2}\right\},$$

可知E同时为F_σ型集与G_δ型集。

(ii) 不妨假定

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n,$$

其中$\{F_n\}$是递增闭集列，$\{G_n\}$是递减开集列，则可作 $f_n\in C(\boldsymbol{R}^1)$ $(n=1,2,\cdots)$如下：

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in F_n,\\ 0, & x\in \boldsymbol{R}^1\setminus G_n.\end{cases}$$

易知

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\chi_E(x).$$

62. 首先，我们有$C+C\subset[0,2]$。

其次，依照正文中Cantor三分集的构成符号，令

$$F_n\times F_n=B_n\ (n=1,2,\cdots),$$

且记

$$B=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n(=C\times C).$$

对 $x_0\in[0,2]$，作平面上过点$(x_0,0)$且与x轴交角为135°的直线，并记此直线与B_1之交集为D_1，又令

$$D_2=D_1\cap B_2,\cdots,D_n=D_{n-1}\cap B_n,\cdots$$

且设

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}D_n=P_0(x,y),$$

则
$$x_0=x+y\in C+C.$$

63. 采用反证法。 假定F_0不是$\{F_\alpha\}$中可数子集族的并集(F_σ)，且F_0不是闭集，则可取

$$x\in\overline{\bigcup_{\alpha}F_\alpha}\Big\backslash\bigcup_{\alpha}F_\alpha,$$

并作$B(x,1)\supset B\left(x,\frac{1}{2}\right)\supset\cdots\supset B\left(x,\frac{1}{n}\right)\supset\cdots$，对每个$n$，选$F_{\alpha_n}\in\{F_\alpha\}$，使得

$$F_{\alpha_n} \cap B\left(x, \frac{1}{n}\right) \neq \varnothing.$$

因为$\bigcup_n F_n \neq \bigcup_\alpha F_\alpha$，所以存在$\beta$，使得$F_\beta$不含于$\bigcup_n F_n$内。故由题设知

$$F_\beta \supset F_n \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

即$F_\beta \supset \bigcup_n F_n$。导致矛盾。

64. 假定存在c, d：$a \leqslant c < d \leqslant b$，使得$f(c) > f(d)$，则对任意的$y$：$f(c) \geqslant y > f(d)$，在$[c, d)$中有一最大点$x_y$，使得$f(x_y) = y$，且

$$f(x') < f(x_y), \quad x' \in (x_y, d).$$

这是不可能的，故$f(x)$递增。

现在，取$t \in [c, d) \setminus D$，依题设存在$\delta_t > 0$，使得当$x \in (t, t + \delta_t) \cap (t, d)$时，有

$$f(c) \leqslant f(t) < f(x) \leqslant f(d).$$

这说明$f(x)$严格递增。

65. 采用反证法。假定$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，$\{F_n\}$是互不相交的闭圆，显然，圆周上必有点$A, B$，使问题归结为阐明：开区间$(A, B)$不能表为可数个互不相交的闭集的并集。

66. 对$x_0 \in \bar{E} \setminus E$，记

$$\varlimsup_{E \ni x \to x_0} f(x) = A, \quad \varliminf_{E \ni x \to x_0} f(x) = B.$$

定义$f(x_0)$为$[B, A]$中任一值。

对$x_0 \bar{\in} \bar{E}$，则存在$x \in \bar{E}$，使得

$$|x - x_0| = d(x_0, \bar{E}),$$

定义$f(x_0) = f(x)$。

第二章

13. 令$E_1 = E \setminus Q$，且作有界闭集$F_n \subset E_1$，使得$a < m(F_n) \leqslant$

$a+\frac{1}{n}$，且$F_{n+1}\subset F_n(n=1,2,\cdots)$。再令 $K=\bigcap_n F_n$，$m(K)=a$。

19. 只需指出，对任一区间(a,b)，有 $m^*(E\cap(a,b))=0$ 即可。首先，存在 $E\cap(a,b)$之覆盖$\{I_k\}$，满足

$$\sum_{k\geq 1}|I_k|\leqslant q(b-a),$$

$$m^*(E\cap(a,b))\leqslant q(b-a).$$

再对 $E\cap I_k(k=1,2,\cdots)$作覆盖，其每一个覆盖之长度总和不大于$q\cdot|I_k|$。从而有

$$m^*(E\cap(a,b))\leqslant q^2(b-a).$$

依次继续作下去，即得所证。

20. 记 $F=\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$，对任给$\varepsilon>0$，可选取$I_{k_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$使得$[a,b]$中不存在点同时属于$\{I_{k_i}\}$中的三个区间，且有

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}I_{k_i}\right|>m(F)-\varepsilon.$$

易知

$$|E\cap F|\geqslant\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}|I_{k_i}|.$$

22. 令 $A_n=[0,1]\setminus E_n$，并取$\{A_{n_k}\}$，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}m(A_{n_k})<1-a.$$

24. 作E的G_δ型等测包H且设可测集F：

$$F\subset(H\cap A)\setminus(E\cap A)=(H\cap A)\setminus E\subset H\setminus E,$$

则 $m(F)=0$。从而由23题知，

$$m(H\cap A)=m^*(E\cap A).$$

25. 作可测集 G_A,G_B：$G_A\supset A$，$G_B\supset B$，使得 $m(G_A)=m^*(A)$，$m(G_B)=m^*(B)$，再令

$$\tilde{G}_A=(A\cup B)\cap G_A,\quad \tilde{G}_B=(A\cup B)\cap G_B.$$

易知$m(\tilde{G}_A\cap\tilde{G}_B)=0$，从而得 $m^*(\tilde{G}_A\setminus A)=0$。即 A 可测。

27. 对任一点集 $A\subset\boldsymbol{R}^n$，易知

$$m^*(T^{-1}(A))=m^*(T^{-1}(A)\cap E)+m^*(T^{-1}(A)\cap E^c),$$

从而由题设知

$$m^*(A)=m^*(A\cap T(E))+m^*(A\cap(T(E))^c).$$

29. 注意$(E-\{a\})\cup(\{a\}-E)\supset(-\delta,\delta)$。

30. 记点集 $E-E$ 所包含的区间 为$I=(a,b)$，且设$|f(x)|\leqslant M$，$x\in E$。则对任意的$x\in I$，有

$$x=\alpha-\beta,\ \alpha,\beta\in E;\quad |f(x)|\leqslant 2M.$$

若记$b-a=c$，以及$x\in[0,c]$，则$x+a\in[a,b]$。易知$|f(x)|$在$[0,c]$上有上界 $4M$。当然，在$[-c,c]$上$|f(x)|\leqslant 4M$。现在对$x\in\boldsymbol{R}^1$，$n\in N$，存在$r\in Q$，使得$|x-r|<\frac{c}{n}$。由此得

$$|f(x)-xf(1)|=|f(x-r)+(r-x)f(1)|$$

$$\leqslant\frac{1}{n}(2M+c|f(1)|).$$

又并由 n 的任意性即得所证。

33. 因为 $f^{-1}(y)$是连续可微的严格递 增 函 数，所以只需指出：若 $m(E)=0$，则 $m(f^{-1}(E))=0$ 即可。令 $h=f^{-1}$，$E_n=E\cap(n,n+1)$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，作

$$M_n=\sup\{h'(x):x\in[h(n-1),h(n+2)]\}.$$

对任给$\varepsilon>0$，作(a_{n_k},b_{n_k})，使得

$$E_n\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_{n_k},b_{n_k})\subset[n-1,n+2],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_{n_k}-a_{n_k})<\frac{\varepsilon}{M_n}.$$

从而有

$$f^{-1}(E_n)=\bigcup_{k=1}^{\infty}(h(a_{n_k}),h(b_{n_k}))$$

$$\subset[h(n-1),h(n+2)],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(h(b_{n_k})-h(a_{n_k}))\leqslant M_n\sum_{k=1}^{\infty}(b_{n_k}-a_{n_k})<\varepsilon.$$

34. 首先，在$[0,1]$中作完备对称集E_1：$m(E_1)=\frac{1}{2^2}$.其次，在E_1的每个邻接区间中作完备对称集$\{E_{1,j}\}$，使得

$$E_2=\bigcup_j E_{1,j},\quad m(E_2)=\frac{1}{2^3},\ \cdots.$$

继续依次进行，并令$E=\bigcup_j E_j$。

35. 令$A_j(j=0,1,2,\cdots,9)$是$[0,1]$中10进位小数表示中不出现j的点的全体，显然$E=\bigcup_{j=0}^{9}A_j$且$\overline{A}_j=c$。把$(0,1]$10等分，舍去区间$\left[\frac{k}{10},\frac{k+1}{10}\right)(k=0,1,\cdots,9)$中的第$j+1$个，则余下的点的小数表示中第一位不出现$j$，且对这些余下的区间再10等分，再舍去第$j+1$个，$\cdots$，最后留下$A_j$。易知舍去的总长为

$$\frac{1}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9^2}{10^3}+\cdots=1,$$

即$m(A_j)=0$。

36. 不妨假定$E\subset(0,1]$。取定p,q，且记

$$A_{p,q}=\left\{x:\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^\alpha}\right\},\quad A_q=\bigcup_{p=1}^{q}A_{p,q}.$$

当$x\in E$时，存在无限个q，使得$x\in A_q$。即

$$E\subset\overline{\lim_{q\to\infty}}A_q.$$

再注意 $m(A_q)\leqslant 2/q^{\alpha-1}$ 即可。

37. 采用反证法。作区间(a,b)，使得

$$A=E\cap(a,b),\quad m(A)>\frac{3}{4}(b-a).$$

取点 $p\in E+E$，使得

$$a+b<p<a+b+d,\quad d=(b-a)/2.$$

考察 $B=\{p\}-A$，则 $B\subset(a,b+d)$，$A\cap B=\varnothing$。从而

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)>3d,$$

这与 $m(A\cup B)\leqslant 3d$ 矛盾。

38. 对$(0,1)$中之不可测集W，令

$$E_k=W+\{r_k\},$$

其中 r_k 是$(0,1)$中有理数列。

39. 采用反证法。取 $\varepsilon_n\in(0,1)$，$\varepsilon_n\to 1(n\to\infty)$，且记相应的可测集列为$\{E_n\}$，作 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$。易知 $m(E)=1$。由 $m(W\cap E^c)=0$可知，$W=(W\cap E)\cup(W\cap E^c)$为可测集，矛盾。

42. 取 $n,k\in N$，$\alpha=3/4$，以及 $(a,b),(c,d)$，使得

$$m(A\cap(a,b))>\alpha(b-a),\ m(B\cap(c,d))>\alpha(d-c),$$

以及 $\alpha<[k(d-c)/n(b-a)]<1$。再选 (a',b')，(c',d')，使得 $k(b'-a')=b-a$，$n(d'-c')=d-c$，以及

$$m(A\cap(a',b'))>\alpha(b'-a'),\ m(B\cap(c',d'))>\alpha(d'-c').$$

从而讨论

$$A'=A\cap(a',b'),\quad B'=B\cap(c',d').$$

43. 设 $c\in R^1$，取递增数列$\{d_n\}$：$d_n\to c\ (n\to\infty)$。易知 $\mu([a,b))=\mu([a+c,b+c))$。设 p,q 是自然数，我们有

$$\mu\left(\left[0,\frac{p}{q}\right)\right)=p\mu\left(\left[0,\frac{1}{q}\right)\right),\ \mu\left(\left[0,\frac{p}{q}\right)\right)=\frac{p}{q}\mu([0,1)].$$

从而对 $r_1,r_2\in Q$，有

$$\mu([r_1,r_2))=\lambda m([r_1,r_2)),\ \ \lambda=\mu([0,1)).$$

易知对 $a,b\in \mathbf{R}^1$，也有 $\mu([a,b])=\lambda m([a,b])$。

对一般 Borel 集，再用开集覆盖即可。

44．记[0,1]中类 Cantor 集为$\tilde{c}$；$m(\tilde{c})>0$。并作 $E=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]:\ x-y\in\tilde{c}\}$。若有 $A\times B\subset E$，则 $A-B\subset\tilde{c}$。此时如果有 $m(A)>0$，$m(B)>0$，那末$\tilde{c}$有非空内核，矛盾。

第 三 章

7．令 $E=\{x\in\mathbf{R}^1:\ f(x)\neq f(x+1)\}$，并作

$$F=\bigcup^{\infty}(E+\{n\}),\quad g(x)=\begin{cases}f(x), & x\overline{\in}F,\\ 0, & x\in F.\end{cases}$$

9．取 $\{b_k\}$，使 $E_k=\{x:|f_k(x)|\leqslant b_k\}$。满足 $m(E_k^c)<\frac{1}{2^{k+1}}(k=1,2,\cdots)$。令$a_k=1/(kb_k)(k=1,2,\cdots)$，并研究$\varliminf\limits_{k\to\infty}E_k$。

10．采用反证法。若存在$x_0\in(0,1)$，使得$f(x_0)\neq g(x_0)$，不妨设$t=f(x_0)>g(x_0)$，则$x_0\in\{x:\ f(x)\geqslant t\}$,且有$m(\{x:\ f(x)\geqslant t\})\geqslant x_0>0$。不妨假定$\{x:\ g(x)\geqslant t\}$之最大点为$x_1$，我们有 $g(x_1\geqslant t>g(x_0)$，故 $x_1<x_0$。由此知

$$m(\{x:\ g(x)\geqslant t\})<m(\{x:\ f(x)\geqslant t\}),$$

矛盾。

11．(ii)⇒(i)　考察点集$\{x\in G:\ f(x)>r\}(r\in Q)$ 中非内点之全体构成之集 A_r，则

$$E=\bigcup_{r\in Q}A_r,\quad m(E)=0.$$

14．根据 Егоров 定理，可取[0,1]中可测集列：$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_k\subset\cdots$，使得 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)$在 E_k 上一致收敛于零，且

$$m([0,1]\setminus E_k)<\frac{1}{k}\quad(k=1,2,\cdots),$$

从而有 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，使得

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{2^k},\quad x\in E_k,\quad n\geqslant n_k.$$

令 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$，显然$m([0,1]\setminus E)=0$。从而只要取

$$t_n=\begin{cases}0, & n\neq n_k,\\ 1, & n=n_k.\end{cases}$$

即可。

20。考虑E中满足下述条件的点x_0：对任给$\varepsilon>0$，点集$E\cap\left(x_0-\frac{\varepsilon}{3M},x_0+\frac{\varepsilon}{3M}\right)$为正测度，不妨记为$2c$。由题设知，对$c$及$\frac{\varepsilon}{3}$，$\exists N$，当$n,m\geqslant N$时，有

$$m\left(\left\{x:\ |f_n(x)-f_m(x)|>\frac{\varepsilon}{3}\right\}\right)<c.$$

这就是说，在$E\cap\left(x_0-\frac{\varepsilon}{3M},x_0+\frac{\varepsilon}{3M}\right)$中必有点$x_N$，使得

$$|f_n(x_N)-f_m(x_N)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad n,m\geqslant N.$$

从而当$n,m\geqslant N$时，有

$$\begin{aligned}|f_n(x_0)-f_m(x_0)|&\leqslant|f_n(x_0)-f_n(x_N)|\\&\quad+|f_n(x_N)-f_m(x_N)|+|f_m(x_N)-f_m(x_0)|\\&\leqslant 2M|x_0-x_N|+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.\end{aligned}$$

23。充分性。作函数

$$g(x)=\lim_{\delta\to0+}\sup\{f(y):\ y\in E,|y-x|<\delta\}.$$

24。首先，在$E\subset[0,1]$上讨论，并假设收敛是一致的。其次，由 Егоров 定理，取$E_k\subset[0,1]$，$m([0,1]\setminus E_k)<\varepsilon 2^{-(k+1)}$ $(k=0,1,2,\cdots)$，再把讨论从E_k转至$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$。

25. 采用反证法。假定$f(x)$在点$x_0\in(a,b)$上不连续，考察区间$(x_0-2\delta,x_0+2\delta)$。因为$f(x)$是无界的，所以存在$\xi_k\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，使得$f(\xi_k)\geqslant k$，$k=1,2,\cdots$。对于$x\in(\xi_k-\delta,\xi_k+\delta)$，我们有

$$x_0-2\delta\leqslant x\leqslant x_0+2\delta,\quad x_0-2\delta\leqslant x'=2\xi_k-x\leqslant x_0+2\delta.$$

由$2f(\xi_k)\leqslant f(x)+f(x')$可知，或$f(x)\geqslant k$或$f(x')\geqslant k$。从而得

$$m(\{x:\ x_0-2\delta\leqslant x\leqslant x_0+2\delta, f(x)\geqslant k\})\geqslant\delta.$$

这与$f(x)$是实值矛盾。

（注　若$f(x)$有界，则$f\in C((a,b))$）。

26. 根据Лузин定理，可作闭集$F_k\subset[a,b]$ $(k=1,2,\cdots)$使得

$$f\in C(F_k),\ |F_k|>(b-a)-\frac{1}{k^2},\ k=1,2,\cdots.$$

易知存在$\eta_k>0$，使得当$|h|<\eta_k$时，有

$$|f(x+h)-f(x)|<\frac{1}{k},\ x\in F_k,\ x+h\in F_k.$$

取$|h_k|<\eta_k$，$k=1,2,\cdots$，作$E_k<F_k$，使得$m(E_k)>(b-a)-2/k^2$，且在E_k上有

$$|f(x+h_k)-f(x)|<\frac{1}{k}.$$

由$m(\varliminf_{k\to\infty}E_k)=b-a$，即得所证。

27. 令$X=\{A\subset R^1:\ f^{-1}(A)$可测$\}$，可证$X$是Borel σ-代数。

28. 对任意的$t\in R^1$，令$E_t=\{y:g(y)<t\}$。$f^{-1}(E_t)$可测，且有

$$\{x:\ h(x)<t\}=\{x:\ f(t)\in E_t\}.$$

29. 令$E_n=\{x:\ (|f_n(x)|/\lambda_n)>1\}$，易知

$$m(\varlimsup_{n\to\infty}E_n)=0.$$

第 四 章

5. 取 $h\in C^{\infty}((0,1))$且支集在(0,1)中，满足$\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x=1$，作

$$\varphi(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t-\int_0^x h(t)\mathrm{d}t\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$\varphi'(x)=g(x)-h(x)\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t.$$

由条件知

$$\int_0^1\left[f(t)-\int_0^1 f(x)h(x)\mathrm{d}x\right]g(t)\mathrm{d}t=0.$$

由此得

$$f(t)=\int_0^1 f(x)h(x)\mathrm{d}x,\quad \text{a.e.}\, t\in(0,1).$$

11. 推演不等式

$$\varliminf_{k\to\infty}\int_e f_k(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x-\int_{E\setminus e}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\varlimsup_{k\to\infty}\int_e f_k(x)\mathrm{d}x.$$

13. (i) $-\frac{\pi^2}{6}$； (ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)(2n+2)}$.

15. 令$g(x)=\sum_n|t_nf_n(x)|$，则$g(x)$在 I 上几乎处处有限，记

$$E_k=\{x\in I:\ g(x)\leqslant k\},\quad E=\bigcup_k E_k,$$

因为有$\sum_n|t_n|\int_{E_k}|f_n(x)|\mathrm{d}x<\infty$，因此，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_k}|f_n(x)|\mathrm{d}x=0.$$

故存在 $n_1<n_2<\cdots<n_i<\cdots$，使得

$$\int_{E_k}|f_{n_k}(x)|\mathrm{d}x<2^{-k}\quad(k=1,2,\cdots).$$

由此知对任意的 $j\in N$，有

$$\sum_k\int_{E_j}|f_{n_k}(x)|\mathrm{d}x<\infty.$$

19. 作具有紧支集的连续函数列$\{f_n(x)\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\quad \text{a.e.}\,x\in\boldsymbol{R}^1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\boldsymbol{R}^1}|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\mathrm{d}x<\infty.$$

从而根据

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R^1}|F[f_{n+1}(x)]-F[f_n(x)]|\mathrm{d}x<\infty,$$

易知 $F(f)\in L(\boldsymbol{R}^1)$。

24. 注意

$$\begin{aligned}&2\int_{a_\lambda}^{b_\lambda}f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_{a_\lambda}^{b_\lambda}\left|f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right|\mathrm{d}t+\int_{a_\lambda}^{a_\lambda+\frac{\pi}{\lambda}}|f(t)|\mathrm{d}t\\&\quad+\int_{b_\lambda}^{b+\frac{\pi}{\lambda}}|f(t)|\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

32. 不妨考虑 $f(x,y)$是有界的，并考察

$$g(x,y)=\int_0^y f(x,t)\mathrm{d}t,\quad (x,y)\in\boldsymbol{R}^2.$$

33. 不妨假定$\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=0$，并令$G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$。易知对任一区间$[a,b]$，有

$$\int_a^b g(\lambda x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda}[G(\lambda b)-G(\lambda a)].$$

由此得$\int_a^b g(\lambda x)\mathrm{d}x\to 0\ (|\lambda|\to\infty)$。

现在，对$f\in L(\boldsymbol{R}^1)$，$\varepsilon>0$，作阶梯函数$\varphi(x)$，使

$$\int_{\boldsymbol{R}^1}|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{M},\quad M=\sup|G(x)|.$$

并注意

$$\left|\int_{\boldsymbol{R}^1}f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon+\left|\int_{\boldsymbol{R}^1}\varphi(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x\right|.$$

34. 由于$E-E$包含区间以及E对加法封闭，故可令

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{i\alpha_n x},\quad x\in\boldsymbol{R}^1,$$

且对任意的$f\in L(\boldsymbol{R}^1)$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{i\alpha_n x}\mathrm{d}x.$$

根据 Riemann-Lebesgue 引理，易知$\{\alpha_n\}$是有界列，且只有一个极限点。

36. 考察$f(x)=\sum_k|a_k|\chi_{E_k}(x)$，$A_n=\{x\in[a,b]:f(x)>n\}$，并取$n_0$充分大，使得$m(E_k\setminus A_{n_0})\geqslant\delta/2$。则

$$\sum_k|a_k|\chi_{E_k}(x)\leqslant n_0,\quad x\in[a,b]\setminus A_{n_0}.$$

易知

$$\sum_k|a_k|m(E_k\setminus A_{n_0})\leqslant n_0(b-a).$$

由此即可得出结论。

37．作函数 $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\chi_E(x)\sin n_k x$，易知 $f(x)=0$，　a.e. $x\in \boldsymbol{R}^1$，注意到对任意可测集 A，有

$$\int_A f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}m(A\cap E),$$

从而得 $m(E)=0$。

44．先取 $0<\varepsilon<N<\infty$，考察

$$\int_\varepsilon^N \mathrm{d}x\int_0^\infty |\sin axf(y)\mathrm{e}^{-xy}|\mathrm{d}y,$$

然后再令 $\varepsilon\to 0$，$N\to\infty$。

45．交换积分次序；分解被积函数。

48．令 $A=\{x: f(x)>g(x)\}$，$B=\boldsymbol{R}^1\setminus A$。

$$A_t=A\cap(-\infty,t),\quad B_t=B\cap(-\infty,t),$$

$$u(t)=\int_{A_t}[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x,\qquad v(t)=\int_{B_t}[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x,$$

对每个 t，均有 s，使得 $u(t)=v(s)$。令 $C_t=A_t\cup B_s$，则

$$\int_{C_t}f(x)\mathrm{d}x=\int_{C_t}g(x)\mathrm{d}x\triangleq H_t.$$

再研究 H_t 即可。

51．注意 E_y 是关于 y 递减的，并对 $\int_0^\infty F(y)\mathrm{d}y$ 应用Fubini定理。

52．注意

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^\infty m(\{x\in E: |f(x)|>\lambda\})\mathrm{d}\lambda.$$

53．记 $E_k=\{x: k^2<|f(x)|\leqslant(k+1)^2\}$，并证明存在 k_0，使得

$$\sum_{k=k_0}^\infty k^2 m(E_k)<\infty.$$

令

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k,\quad f(x)=f(x)\cdot\chi_E(x)+f(x)\chi_{R^n\setminus E}(x).$$

54。对任意可测集 E，考察

$$\mu(E)=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

第 五 章

1．用 Vitali 覆盖定理。

4．注意不等式

$$\int_a^b\sum_{n=N}^{\infty}f_n'(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=N}^{\infty}\int_a^b f_n'(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=N}^{\infty}[f_n(b)-f_n(a)].$$

5．作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & [0,r_n),\\ \dfrac{1}{2^n}, & [r_n,1].\end{cases}\qquad [0,1]\cap Q=\{r_n\},$$

以及

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x).$$

6．令 $f(x)=m^*(E\cap[x-h,x])$，只需证明 $f'(x)=1$, a.e. $x\in E$. 作开集 G_n：$G_n\supset E$，使得 $m(G_n)<m^*(E)+2^{-n}$并记

$$f_n(x)=m(G_n\cap[a,x]),\quad n=1,2,\cdots.$$

易知 $0<f_n(x)-f(x)\leqslant f_n(y)-f(y)\leqslant 2^{-n}$ $(a\leqslant x\leqslant y\leqslant b)$。由此可知

$$\lim_{n\to\infty}[f_n'(x)-f'(x)]=0,\quad \text{a.e.}\,x\in[a,b].$$

而 $f_n'(x)=1$，$x\in E$。

14．令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，易知：

$$F(b)-F(a)=F(b+s)-F(a+s),$$

以及 $F(t+s)=F(t)+F(s)$。从而有

$$F(t)=tF(1),\quad F'(t)=F(1)=f(t),\quad \text{a.e.}\, t\in \boldsymbol{R}^1.$$

15．考察 $y=t^2$ 并利用 Lagrange 微分中值公式。

16．令 $\tilde{C}$ 是 $[0,1]$ 中类 Cantor 集，$m(\tilde{C})>0$，$m([0,1]\setminus\tilde{C})>0$。考察 $f(x)=\int_0^x \chi_{\tilde{C}}(t)\mathrm{d}t$。

25．设 $Z\subset[a,b]$，且 $m(Z)=0$，作开集列 G_n：$G_n\supset Z$，$m(G_n)<1/2^n$，又令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x \chi_{G_n}(t)dt,$$

易知当 $x\in Z$ 时，$f'(x)=+\infty$。

27．设 $g(x)$ 是支集含于 (a,b) 的无穷次可微的函数，我们有

$$\int_a^b f_n(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\left(\int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f_n'(t)\left(\int_t^b g(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t.$$

故得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_a^x F(t)\mathrm{d}t\right)\cdot g(x)\mathrm{d}x.$$

由此知

$$f(x)=\int_a^x F(t)\mathrm{d}t,\quad \text{a.e.}\, x\in[a,b].$$

30．取 $a\in \boldsymbol{R}^1$，使得 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=A^{-1}\neq 0$，则有

$$f(x)=A\int_0^a f(x)f(t)\mathrm{d}t=A\int_x^{x+a}f(t)\mathrm{d}t.$$

故得

$$f'(x)=Bf(x),\quad B=A[f(a)-1].$$

31. 对 $x\in[a,b]$，存在 $\delta_x>0$，使得

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|\leqslant \overset{\triangledown}{f}'(x)+1,\quad x_1,x_2\in B(x,\delta_x).$$

再用有限覆盖定理。

32. 只需证明必要性，对 $\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|<\delta$，有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(y_i)|<\varepsilon.$$

从而对任意的子区间组 $\{[x_i,y_i]\}$，存在 N，使得

$$(N-1)\delta\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|<N\delta.$$

将每个 $[x_i,y_i]$ 分成 N 个子区间，易知

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(y_i)|\leqslant\frac{\varepsilon}{\delta}\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|+\varepsilon.$$

33. 注意等式

$$\int_E\varphi[f(x)]\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^1}\chi_E(x)\left(\int_0^{f(x)}\varphi'(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

第 六 章

8. 注意有分解式

$$f(x)g(x)=[f(x)]^{1-p/r}[g(x)]^{1-q/r}[f^p(x)g^q(x)]^{1/r}.$$

9. 注意不等式

$$\left(\int_{\mathbf{R}^n}|f(t)g(x-t)|\mathrm{d}t\right)^r\leqslant\|f\|_p^{r-p}\|g\|_q^{r-q}\times\int_{\mathbf{R}^n}|f(t)|^p|g(x-t)|^q\mathrm{d}t.$$

10. 只需指出 $f(x)$ 在 E 上有界。若不然，则令 $E_k=\{x\in E:|f(x)|>k\}$ $(k=1,2,\cdots)$。易知存在 $\{k_j\}$ 及 $\{i_j\}$，使得

$$\frac{1}{(i_j)^{\alpha}}\leqslant m(E_{k_j}\setminus E_{k_{j-1}})<\frac{1}{(i_{j-1})^{\alpha}}.$$

作函数

$$g(x)=\begin{cases}(i_j)^{\beta}, & x\in E_{k_j}\setminus E_{k_{j-1}},\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

其中 $\alpha=\dfrac{3}{2}\dfrac{q_0}{q_0-p_0}$, $\beta=\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{q_0-p_0}$. 易知 $g\in L^{p_0}(E)$, 但 $g\bar{\in} L^{q_0}(E)$.

20. 由题设易知，对任意的 $g\in L^{p'}(\boldsymbol{R}^n)$, $1/p+1/p'=1$, 有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x=0.$$

21. 利用 Jensen 不等式（第四章习题第47题），并注意

$$\log u\leqslant u-1.$$

22. 采用反证法。若存在非零 $\varphi\in L^2([a,b])$, 使得

$$\int_a^b\varphi(x)g(x)\mathrm{d}x=0,\quad g\in D,$$

则令 $e_k=\{x\in[a,b]: f(x)\leqslant k\}$, 易知 $f^+(x)=0$, a.e. $x\in[a,b]$, 同理可知 $f^-(x)=0$, a.e. $x\in[a,b]$.

25. 令 $S_k(x)=\sum_{i=1}^{k}f_i(x)/i$, 则 $\|S_k-f\|_2\to 0$ $(k\to\infty)$, 且作函数列

$$g_k(x)=\sum_{i=1}^{k}|S_{(i+1)^2}(x)-S_{i^2}(x)|,$$

易知存在 $g\in L^2(E)$, 使得 $g_k\to g(k\to\infty)$. 注意对 $k^2<j<(k+1)^2$, 有

$$|S_j(x)-S_{k^2}(x)|\leqslant M^2\sum_{k+1}^{j}i^{-2}\to 0\quad(k\to\infty).$$

29. 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 E: $m([a,b]\setminus E)<\varepsilon$, 使得 $a_k\varphi_k(x)\to 0$（在 E 上一致，$k\to\infty$），而且

$$\lim_{k\to\infty} a_k \int_E \varphi_k^2(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_E \varphi_k^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 1 - M^2\varepsilon.$$

31. 易知 $xe^{2n\pi ix} \in X(n=1,2,\cdots)$，且若

$$\int_0^1 (xe^{2n\pi ix})g(x)\mathrm{d}x = 0, \quad n=1,2,\cdots.$$

则 $xg(x)=c$, a.e.$x\in(0,1)$. 从而当 $c\neq 0$ 时，$g(x)\overline{\in} L^2([0,1])$. 注意$X$是线性空间.

34. 采用反证法. 若$\|f\|_{p'}=\infty$,则存在 g_n:$\|g_n\|_p=1$，使得

$$\int_{R^1} |f(x)g_n(x)|\mathrm{d}x > n^3 \ (n=1,2,\cdots).$$

令$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|g_n(x)|/n^2$，易知 $f\cdot g\overline{\in} L(\boldsymbol{R}^1)$.

37. 记 $d(K,F)=3r>0$，且记

$$g(x)=\begin{cases} \exp(-1/(1-|x|^2)), & |x|<1, \\ 0, & |x|\geqslant 1, \end{cases}$$

$$\int_{R^n} g\left(\frac{x}{r}\right)\mathrm{d}x = c, \quad h(x)=g\left(\frac{x}{r}\right)\Big/c,$$

$$G=\{x\in\boldsymbol{R}^n: d(x,K)\leqslant r\},$$

从而作

$$\varphi(x)=\int_G h(x-y)\mathrm{d}y, \quad x\in\boldsymbol{R}^n$$

即可.

39. (i)⇒(ii). 对$\left|\int_{E_i} f(x)\mathrm{d}x\right|^p$ 用 Hölder 不等式.

(ii)⇒(i): 对$g(x)=\sum_{i=1}^{k} c_i\chi_{E_i}(x)$，$c_i\neq 0 \ (i=1,2,\cdots,k)$，可得

$$\left|\int_{R^n} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{i=1}^{k} c_i\int_{E_i} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M^{\frac{1}{p}}\|g\|_{p'},$$

其中 p' 是 p 的共轭指标.

附录(Ⅲ) Lebesgue (勒贝格) 传

勒贝格，H. L. (Henri Léon Lebesgue) 1875年6月28日生于法国的博韦，1941年7月26日卒于巴黎。

勒贝格的父亲是一名印刷厂职工，酷爱读书，颇有教养。在父亲的影响下，勒贝格从小勤奋好学，成绩优秀，特别善长计算。不幸，父亲去世过早，家境衰落。在学校老师的帮助下进入中学，后又转学巴黎。1894年考入高等师范学校。

1897年大学毕业后，勒贝格在该校图书馆工作了两年。在这期间，出版了E. 波莱尔关于点集测度的新方法的《函数论讲义》，特别是研究生R. 贝尔发表了关于不连续实变函数理论的第一篇论文。这些成功的研究工作说明在上述崭新的领域中进行开拓将会获得何等重要的成就，从而激发了勒贝格的热情。从1899年到1902年勒贝格在南锡的一所中学任教，虽工作繁忙，但仍孜孜不倦地研究实变函数理论，并于1902年发表了博士论文"积分、长度与面积"。在这篇文章中，勒贝格创立了后来以他的名字命名的积分理论。此后，他开始在大学任教(1902—1906在雷恩；1906—1910在普瓦蒂埃)，并出版了一些重要著作：《积分法和原函数分析的讲义》(1904)；《三角级数讲义》(1906)。接着，勒贝格又于1910—1919年在巴黎(韶邦)大学担任讲师，1920年转聘为教授，这时他又陆续发表了许多关于函数的微分、积分理论的研究成果。勒贝格于1921年获得法兰西学院教授称号，翌年作为C. 若尔当的后继人被选为巴黎科学院院士。

勒贝格对数学的主要贡献属于积分论领域，这是实变函数理论的中心课题。19世纪以来，微积分开始进入严密化的阶段。1854年B. 黎曼引入了以他的名字命名的积分，这一理论的应用范围

主要是连续函数。随着K.外尔斯特拉斯和G.康托尔工作的问世，在数学中出现了许多“奇怪”的函数与现象，致使黎曼积分理论暴露出较大的局限性。几乎与这一理论发展的同时（1870—1880年），人们就已广泛地开展了对积分理论的改造工作。当时，关于积分论的工作主要集中于无穷集合的性质的探讨，而无处稠密的集合具有正的外“容度”性质的发现，使集合的测度概念在积分论的研究中占有重要地位。积分的几何意义是曲线围成的面积，黎曼积分的定义是建立在对区间长度的分割的基础上的。因此，人们自然会考虑到如何把长度、面积等概念扩充到更广泛的集合类上，从而把积分概念置于集合测度理论的框架之中。这一思想的重要性在于使人们认识到，集合的测度与可测性的推广将意味着函数的积分与可积性的推广。勒贝格积分正是建立在勒贝格测度理论的基础上的，它是黎曼积分的扩充。

为勒贝格积分理论的创立作出重要贡献的首先应推若尔当，他在《分析教程》一书中阐述了后人称谓的若尔当测度论，并讨论了定义在有界若尔当可测集上的函数，采用把区域分割为有限个若尔当可测集的办法来定义积分。虽然若尔当的测度论存在着严重的缺陷（例如存在着不可测的开集，有理数集不可测等），而且积分理论也并没有作出实质性的推广，但这一工作极大地影响着勒贝格研究的视野。在这一方向上迈出第二步的杰出人物是波莱尔，1898年在他的《函数论讲义》中向人们展示了“波莱尔集”的理论。他从R^1中开集是构成区间的长度总和出发，允许对可列个开集作并与补的运算，构成了所谓以波莱尔可测集为元素的σ代数类，并在其上定义了测度。这一成果的要点是使测度具备完全可加性（若尔当测度只具备有限可加性），即对一列互不相交的波莱尔集$\{E_n\}$，若其并集是有界的，则其并集的测度等于每个E_n的测度的和。此外，他还指出，集合的测度和可测性是两个不同的概念。但在波莱尔的测度思想中，却存在着不是波莱尔集的若尔当可测集（这一点很可能是使他没有进一步开创积分理论的

原因之一）．特别是其中存在着零测度的稠密集，引起了一些数学家的反感．然而勒贝格却洞察了这一思想的深刻意义并接受了它．他突破了若尔当对集合测度的定义中所作的有限覆盖的限制，以更加一般的形式发展和完善了波莱尔的测度观念，给予了集合测度的分析定义：设 $E\subset[a,b]$，考虑可数多个区间$\{I_i\}$对 E 作覆盖．定义数值 $m^*(E)=\inf\{\sum\limits_i|I_i|:\bigcup\limits_i I_i\supset E\}$为勒贝格外测度，且若

$$m^*(E)+m^*([a,b]\backslash E)=b-a,$$

则称 E 为可测集（即 E 是勒贝格可测的）．在此基础上，勒贝格引入了新的积分定义：对于一个定义在$[a,b]$上的有界实值函数 $f(x)(M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2)$，作$[M_1,M_2]$的分划$\Delta$：

$$M_1=y_0<y_1<\cdots<y_{n-1}<y_n=M_2.$$

令

$$E_i=\{x\in[a,b]:y_{i-1}\leqslant f(x)\leqslant y_i\}\qquad(i=1,2,\cdots,n),$$

并假定这些集合是可测的（即 $f(x)$是勒贝格可测函数），并用 $m(E_i)$表示 E_i的 Lebesgue 测度．考虑和式

$$s_\Delta=\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}\cdot m(E_i),\quad S_\Delta=\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot m(E_i),$$

如果当 $\max\{y_i-y_{i-1}\}\to0$时，s_Δ与 S_Δ趋于同一极限值，则称此值为 $f(x)$在$[a,b]$上的积分．勒贝格曾对他的这一积分思想作过一个生动有趣的描述："我必须偿还一笔钱．如果我从口袋中随意地摸出来各种不同面值的钞票，逐一地还给债主直到全部还清，这就是黎曼积分；不过，我还有另外一种作法，就是把钱全部拿出来并把相同面值的钞票放在一起，然后再一起付给应还的数目，这就是我的积分"．在他的这一新思想中，凡若尔当可测集，波莱尔可测集都是勒贝格可测集．勒贝格积分的范围包括了由贝尔引入的一切不连续函数．

从数学发展的历史角度看，新的积分理论的建立是水到渠成的事情。但是可贵的是，与同时代的一些数学家不同，在勒贝格看来，积分定义的推广只是他对积分理论研究的出发点，他深刻地认识到，在这一理论中蕴含着一种新的分析工具，使人们能在相当大范围内克服黎曼积分中产生的许多理论困难。而正是这些困难所引起的问题是促使勒贝格获得这一巨大成就的动力。

这方面的第一个问题是早在19世纪初期由J.傅里叶在关于三角级数的工作中不自觉地引发的：当一个有界函数可以表示为一个三角级数时，该级数是它的傅里叶级数吗？这一问题与一个无穷级数是否可以逐项积分有着密切的关系。傅里叶当时曾认为在其和为有界函数时这一运算是正确的，从而给上述问题以肯定的回答。然而到了19世纪末期，人们认识到逐项积分并不总是可行的，甚至对于黎曼可积函数的一致有界的级数也是这样，因为由该级数所表示的函数不一定是黎曼可积的。这个问题的讨论促使勒贝格在新的积分理论中获得了一个十分重要的结果：控制收敛定理。作为一个特殊情形他指出，勒贝格可积的一致有界级数都可以逐项进行积分，从而支持了傅里叶的结论。逐项积分在本质上就是积分号下取极限的问题，它是积分论中经常遇到的最重要的运算之一。从而这一定理的创立显示出勒贝格积分理论的极大优越性。

微积分基本定理

$$\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x = f(x) - f(a), \qquad x \in [a,b] \tag{1}$$

是微积分学的核心。然而这一公式的运用在黎曼积分意义下却有较大的局限性。在1878—1881年间，U.迪尼和V.沃尔泰拉曾构造了这样的函数，它们具有有界的导函数，但是导函数不是黎曼可积的，从而基本定理对此是不适用的。此后，联系到黎曼积分对无界函数的推广也发现了类似的困难。然而，在新的积分理论中，勒贝格指出，对有界函数来说，这一困难是不存在的。在

$f'(x)$是有限值但无界的情形，只要是可积的，基本定理仍是成立的，而且这正相当于f是有界变差函数。同时，逆向问题也被人们提出来了：何时一个连续函数是某个函数的积分？为此，A.哈纳克曾导入了后来叫做绝对连续的函数。约在1890年期间，绝对连续函数就被当作绝对收敛的积分的特征性质来研究，虽然还没有人能真正证明任何绝对连续函数都是一个积分。然而，勒贝格通过对于导数几乎处处为零但函数本身并非常数的函数的考察，认识到在他的积分意义下，上述结论是正确的。从而得出了积分与原函数之间的一个完整结果：公式（1）成立的充分且必要条件是，$f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数。

另一个与积分论有关的问题是曲线的长度问题。19世纪前期，很少有人注意到一条曲线长度的定义和可求长问题。一般都认为以$y=f(x)$（$a\leqslant x\leqslant b$）所描述的曲线段总是有长度的，且长度可用

$$L=\int_a^b[1+[f'(x)]^2]^{\frac{1}{2}}dx$$

表示。杜·布瓦-雷蒙在研究关于两点间长度最短的曲线的变分问题时，从P.G.L.狄利克雷关于函数的一般观点出发探讨了曲线长度的概念。由于用到了极限过程这一分析手段，他认为(1879)积分理论对曲线长度的概念和可求长性质的陈述是必不可少的。而到了19世纪末期，这一见解由于L.舍费尔举出了反例而更为尖锐，这一反例致使定积分$\int_{x_0}^{x_1}[1+[f'(x)]^2]^{\frac{1}{2}}dx$在黎曼积分的定义下没有意义。勒贝格对这一问题很感兴趣，并应用他的积分论中的方法和结果，证明了曲线长度与积分概念是密切相关的，从而恢复了杜·布瓦-雷蒙断言的可信性。

勒贝格关于微积分基本定理和曲线可求长理论的研究，促使他发现有界变差函数是几乎处处可微的这一事实（注：若尔当曾指出不定积分是有界变差函数）。这一定理的重要性在于：人们对于连续函数的可微性已经讨论了一个多世纪，在19世纪的几乎

前半个世纪，人们还一直认为连续函数在其定义区域中的绝大多数点上都是可微的。虽然连续函数总被误认为是逐段单调的，但这使单调性与可微性联系起来了，尽管是脆弱的。到19世纪末期，这一看法逐渐被人怀疑，甚至有些其地位不低于外尔斯特拉斯的数学家都觉得存在着无处可微的连续的单调函数。于是，在这一意义下，勒贝格的定理支持了老一代数学家的直觉印象。

在传统的关于二重积分与累次积分的恒等性定理上，黎曼积分也反映出它的不足之处，人们发现了使该定理不成立的例子。从而作为一个结论，这一定理的传统说法必须修改，然而在把积分推广于无界函数的情形时，这一修改变得更加严峻。对此，勒贝格的重积分理论，使得用累次积分来计算二重积分的函数范围扩大了。他在1902年给出的一个结果奠定了1907年G.富比尼创立的著名定理的基础。

勒贝格积分理论作为分析学中的一个有效工具的出现，尤其是他在三角级数中应用的高度成功，吸引了许多数学家的兴趣。例如P. 法图，F. 里斯和E. 菲舍尔等都来探讨有关的问题，使这一领域开始迅速发展，其中特别是里斯关于L^p空间的工作（注：勒贝格可积的函数全体构成的距离空间是完备的），使得勒贝格积分在积分方程和函数空间的理论中持久地占有重要的位置。

虽然勒贝格在最初阶段专注于他自己的积分理论，然而在激励抽象测度和积分论研究的开展上，他的工作仍是先导性的。1910年，勒贝格发表题为“关于不连续函数的积分”的重要专题报告。在这里他不仅把积分、微分理论推广于n维空间，而且引入了可数可加集合函数的概念（定义于勒贝格可测集类上），指出这些函数是定义在集合类上的有界变差函数。正是因为对于有界变差与可加性概念之间联系的考察，使得J.拉东作出了更广的积分定义，其中把T.-J.斯蒂尔杰斯积分和勒贝格积分作为它的特殊情形。他还在1913年的文章中指出，勒贝格的思想在更一般的背景上也是有效的。

勒贝格的一生都献给了数学事业。在1922年被推举为院士时，他的著作和论文已达90种之多，内容除积分理论外，还涉及集合与函数的构造（后来由俄国数学家 H. 鲁津及其他学者进一步作出发展）、变分学、曲面面积以及维数理论等重要课题。在勒贝格生前最后20年中，研究工作仍然十分活跃并反映出广泛的兴趣，不过作品内容大都涉及教育、历史及初等几何。

勒贝格的工作是对本世纪科学领域的一个重大贡献，但和科学史上每种新思想的出现一样，并不是没有遇到阻力的。原因是：在勒贝格的研究中扮演了重要角色的那些不连续函数和不可微函数被认为是违反了所谓的完美性法则，是数学中的变态和不健康部分。因此，他的工作受到了某些数学家的冷淡，甚至有人曾企图阻止他关于一篇讨论不可微曲面的论文的发表。勒贝格曾感叹地说："我被称为是一个没有导数的函数的那种人了。"然而，不论人们的主观愿望如何，这些具有种种奇异性质的对象都自动地进入了研究者曾企图避开它们的问题之中。勒贝格充满信心地指出："使得自己在这种研究中变得迟钝了的那些人，是在浪费他们的时间，而不是在从事有用的工作。"

由于在实变函数理论方面的杰出成就，勒贝格相继获得胡勒维格奖（1912年）；彭赛列奖（1914年）和赛恩吐奖(1917年)。许多国家和地区（如伦敦、罗马、丹麦、比利时、罗马尼亚和波兰）的科学院都聘他为院士，许多大学授予他名誉学位，以表彰他的贡献。

附录(IV) 人 名 表

1.	Baire, R.	贝 尔	1894—1932
2.	Bolzano, B.	波尔查诺	1781—1848
3.	Borel, E.	波莱尔	1871—1956
4.	Cantor, G.	康托尔	1846—1918
5.	Carathéodory, C.	卡拉西奥多里	1873—1950
6.	Cauchy, A.	柯 西	1789—1857
7.	Dini, U.	迪 尼	1845—1918
8.	Dirichlet, P.	狄利克雷	1805—1859
9.	De Morgan	德·摩根	1806—1871
10.	Fatou, P.	法 图	1878—1929
11.	Fischer, E.	菲舍尔	1875—1959
12.	Fourier, J.	傅里叶	1768—1830
13.	Fubini, G.	富比尼	1879—1943
14.	Hardy, G.	哈 代	1877—1947
15.	Harnack, A.	哈纳克	1851—1888
16.	Heine, H.	海 涅	1821—1881
17.	Hölder, O.	赫尔德	1659—1937
18.	Jordan, C.	若尔当	1838—1922
19.	Levi,B.	勒维	1875—1928
20.	Minkowski, H.	闵科夫斯基	1864—1909
21.	Radon, J.	拉 东	1887—1956
22.	Riemann, B.	黎 曼	1826—1866
23.	Riesz, F.	里 斯	1880—1956
24.	Scheeffer, L.	舍费尔	1859—1885
25.	Schwarz, H.	施瓦兹	1843—1921
26.	Vitali, G.	维他利	1875—1932
27.	Volterra, V.	伏尔泰拉	1860—1940
28.	Weierstrass, K.	外尔斯特拉斯	1815—1897
29.	Егоров	叶戈罗夫	1869—1931
30.	Лузин	鲁 津	1883—1952

参考书目

[1] 江泽坚，吴智泉，实变函数论，人民教育出版社，1959.

[2] И. П. 那汤松，实变函数论，高等教育出版社，1958.

[3] Wheedan R. L., Zygmund A., Measure and Integration, Marcel Dekker, INC., New York and Basel, 1977.

[4] Hewitt E., Stromberg K., Real and Abstrack Analysis, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1975.

[5] Hoffman K., Analysis in Euclidean Space, Prentice-Hall, INC., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[6] Mukherjea A., Real and Functional Analysis, New York, 1978.

[7] Benedetto J. J., Real Variable and Integration, Teubner B. G., Stuttgart, 1976.